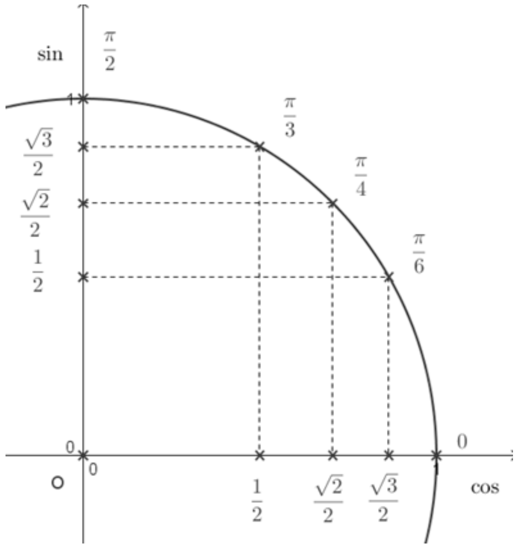
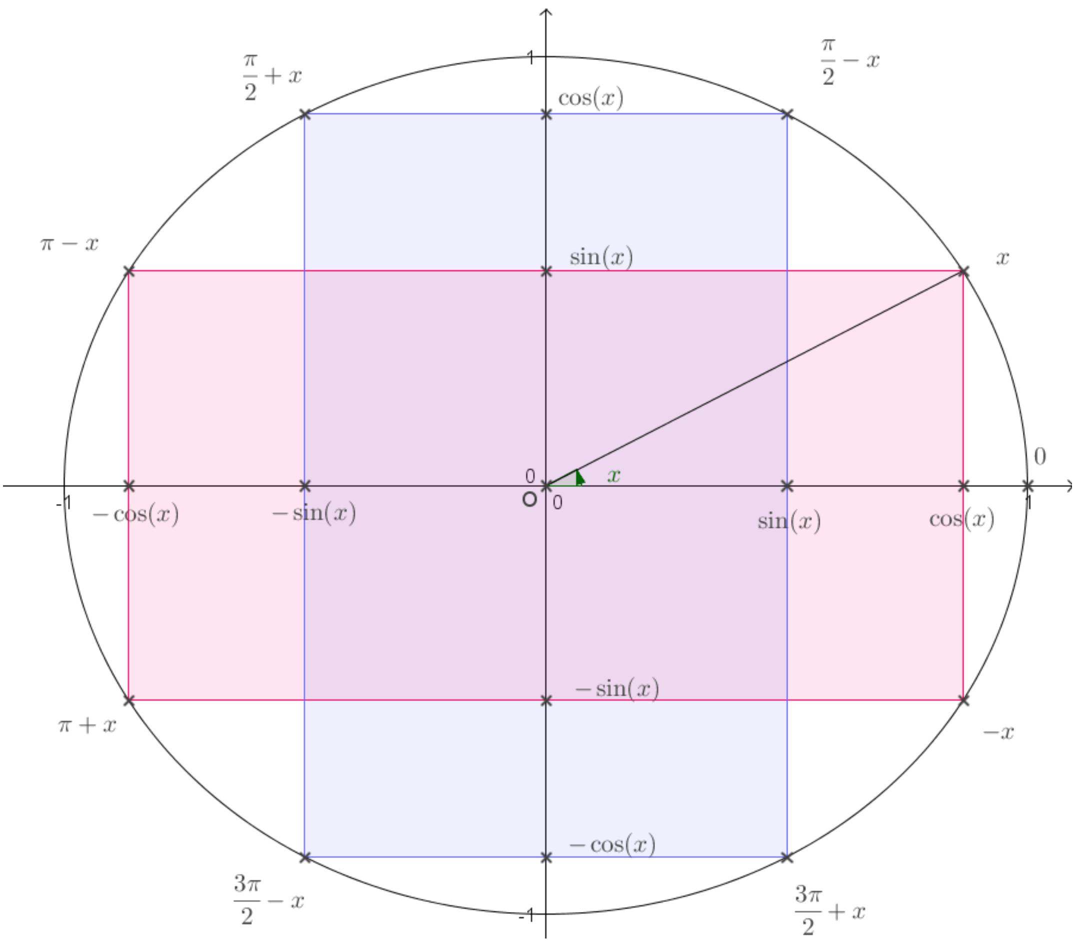
I. Rappel sur les angles

1. Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



2. Relations usuelles



$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = \sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos(x)$$

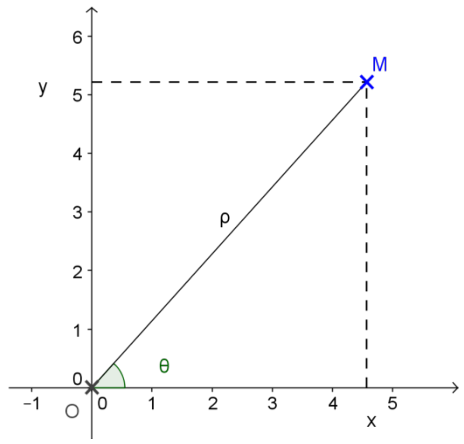
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$$

II. Les nombres complexes

Les nombres complexe sont une interprétation algébrique du plan ($\mathbb{R}^2$). On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition : On note i (j en électronique) le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

a. Notation algébrique



Définition : On appelle nombre complexe z de l'ensemble $\mathbb{C}$, l'affixe du point M de coordonnées (x, y) tel que :

$$z = x + iy.$$

Exemple : Le point A de coordonnées $(3\,;4)$ a pour affixe $z_A = 3 + 4i$.

b. Module et argument

Définition : On module du nombre complexe z de l'ensemble $\mathbb{C}$, la distance OM :

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z'

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (\text{avec } z' \neq 0)$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Exemples :

- Soit le point M d'affixe $z = 1 + 5i$.
  Le nombre complexe $z = 1 + 5i$ a pour module $|z| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$.
  C'est la longueur du segment $OM = \sqrt{26}$.
- Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = 4 - 2i$ et $z_B = 1 + 2i$.
  Calculer la longueur AB :
  $AB = |\, z_B - z_A| = |4 - 2i - (1 + 2i)| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Exercice 1 : déterminer le module des complexes :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ 2) $z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ 3) $z_3 = -3 - \sqrt{5}$

c. Argument

Définition : On appelle argument d'un nombre complexe z de l'ensemble $\mathbb{C}$, l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$

$$\arg(z) = \left(\vec{u}\,, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi].$$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' non nuls.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z).$$

Exemples :

- Le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ a pour argument : $\arg z = \frac{\pi}{6}$
- L'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z z' est noté $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est donné par :

$$(\vec{u}\,,\vec{v}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi].$$

Exercice 2 : calculer les arguments des nombres complexes :

1) $z = 2 - 2i$ 2) $z = -2i$ 3) $z = \frac{4}{1-\mathrm{i}}$

Exercice 3 : Argument de :

1) z^8 avec $z = \sqrt{3} + i$ 2) $z = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

d. Conjugué

Définition : Soit z un nombre complexe d'affixe $z = a + ib$, on appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - ib.$$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z on a :

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$
$$|\bar{z}| = |z|$$
$$z\bar{z} = |z|^2$$
$$\arg(\bar{z}) = \arg(z).$$

Remarque : Le troisième point est utilisé pour simplifier les quotients ; exemple :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls alors :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}.$$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' non nul on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$
$$\overline{z^n} = \bar{z}^n\,.$$

e. Notation trigonométrique

Définition : On appelle notation trigonométrique d'un nombre complexe z de $\mathbb{C}$:

$$z = \rho(\cos\theta\ + i\sin\ \theta).$$

Retour sur exemple : Pour trouver l'argument du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$, on utilise la notation trigonométrique.

Dans un premier temps, on calcule le module : $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Ensuite, l'écrite se transforme en $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

Il s'agit ensuite de trouver l'angle dans le cercle trigonométrique pour le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire déterminer θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Il s'agit de l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

f. Notation exponentielle

Au regard de ces propriétés et de celle de la fonction exponentielle réel, pour simplifier les calculs, on adopte la **notation** exponentielle :

Définition : On appelle notation trigonométrique d'un nombre complexe z de $\mathbb{C}$:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Propriétés : Pour les nombres complexes z et z' de notation exponentielle $e^{i\theta}$, $e^{i\theta'}$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

Exercice 4 Écrire sous forme trigonométrique $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = \left(\frac{1}{2}\right)(1 - i)$

Poser $Z = zz'$. Déterminer l'écriture algébrique de Z puis son écriture trigonométrique

En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

g. Vision Vectoriel

Note importante : Un nombre complexe est considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Le point M d'affixe z est plutôt vue comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et permet de définir la somme deux nombres complexes comme la somme de deux vecteurs.

Exemple : Soient les points $A(1\,;2)$ et $B(4\,;3)$ d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 4 + 3i$.

L'affixe du point C est : $z_C = z_A + z_B = 5 + 5i$ peut être vue comme :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

h. Exercices (lien)