I. Equation différentielle du type $y' + ay = b$.

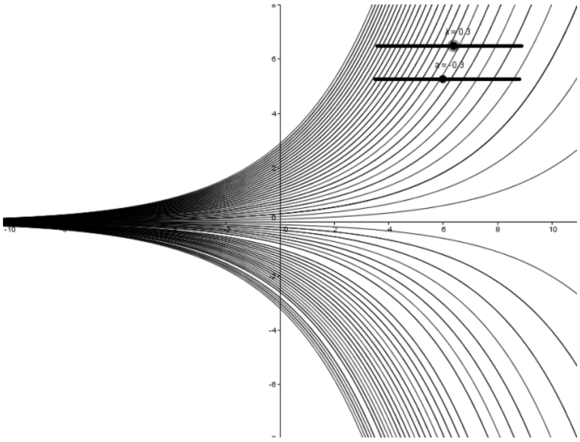
a. Equation homogène $y' + ay = 0$

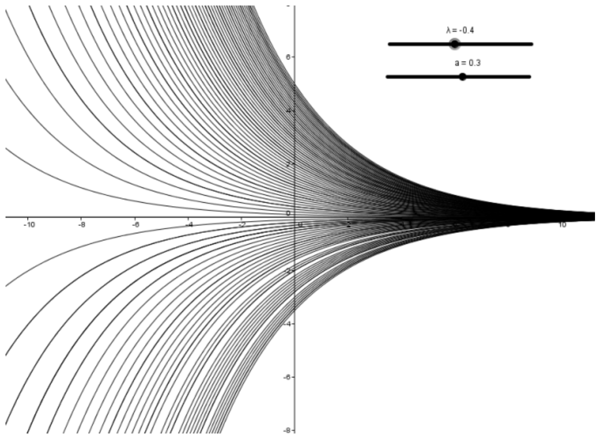
Théorème : Soit l'équation différentielle $y' + ay = 0$, où a est un nombre réel et où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-at},$$

où λ est une constante réelle.

Observons l'ensemble des fonctions trouvées en selon les valeurs de a et de λ :





b. Equation générale $y' + ay = b(t)$

Théorème : Soit l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$, où a est un réel non nul, b une fonction et où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
1. On résout l'équation homogène $y' + ay = 0$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation de la forme de la fonction b.
3. Les solutions sont les fonctions formées de la somme des solutions homogènes et de la solution particulière.

Théorème : Soit x_0 et y_0 deux réels. L'équation différentielle $y' + ay = b(t)$, où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, admet une unique solution f vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$.

II. Equation du second degré dans les nombres complexes

Théorème : Soient a, b et c trois réels avec a non nul, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions selon les valeurs du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:
- Si $\Delta > 0$ les 2 réels solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$ la solution réel double est $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$ les solutions complexes sont $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

III.Equation différentielle du type $ay'' + by' + cy = d(t)$.

a. Equation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ et équation caractéristique

Définition : Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b et c sont des nombres réels avec a non nul et y une fonction de la variable x. On appelle équation caractéristique associée (e.c.a.) à l'équation différentielle :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Théorème : Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, et Δ le discriminant de l'e.c.a.

(i) Si $\Delta > 0$ l'e.c.a admet 2 racines réelles $r_1 \neq r_2$ les solutions de e.d. sont les fonctions :

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, l'e.c.a a une racine réelle double r les solutions de e.d. sont les fonctions :

$$t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt}$$

(iii) Si $\Delta < 0$ l'e.c.a a deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de e.d. sont les fonctions :

$$t \mapsto (\lambda_1 \times \cos(\beta t) + \lambda_2 \times \sin(\beta t))\, e^{\alpha t}.$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

b. Equation générale $ay'' + by' + cy = d(x)$

Théorème : Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$, où a, b et c sont des réels et a non nul, d une fonction et où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On résout l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation de la forme de la fonction d.
3. Les solutions sont les fonctions formées de la somme des solutions homogènes et de la solution particulière.

c. Solution vérifiant des conditions initiales

Théorème : Soient x_0, y_0 et y_1 trois réels. L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$, où ω est un nombre réel non nul, admet une unique solution f vérifiant les conditions :

$$f(x_0) = y_0 \text{ et } f'(x_0) = y_1.$$