Équation différentielle du second ordre

Exercice 55
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 9y = 0$;
2. $y'' + 121y = 0$;
3. $y'' + 3y = 0$;
4. $4y'' + y = 0$;
5. $9y'' + 4y = 0$;
6. $2y'' + y = 0$.

Exercice 56
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$;
2. $y'' - 2y' + 2y = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = 0$;
4. $y'' - 4y' = 0$;
5. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
6. $4y'' + 9y = 0$.

Exercice 57
Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant la valeur des constantes grâce aux conditions initiales.

1. $y'' = 2t$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
2. $y'' = t + 1$; $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.
3. $y'' = \sin 2\theta$; $u(0) = 0$ et $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 58
Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solutions particulières constantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = 12$;
2. $y'' + 2y' - 2y = 6$;
3. $y'' - 3y' + 5y = 10$;
4. $y'' + 4y' = 0$;
5. $y'' + 12y' - 5y = 15$;
6. $4y'' + 9y = 21$.

Exercice 59
Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solutions particulières affines :

1. $y'' - 3y' + 3y = 3t + 3$;
2. $y'' + 2y' - 2y = 2t + 2$;
3. $y'' - 3y' + 5y = t$;
4. $y'' + 4y' = -t$;

Exercice 60
Pour chacune des équations différentielles suivantes, :

1. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser la solution particulière f qui vérifie la condition indiqué.

1. $2y'' + 3y' - 2y = 7$
   h admet un minimum égal à 6 pour $x = 0.$;
2. $\varphi'' + 4\varphi = 8$
   $\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ et $\varphi'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$;
3. $u'' + 4u' = x - 13$
   on cherchera une solution particulière de la forme $u(x) = ax + bx + c$
   $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$;
4. $t'' - 2t' + t = e^y$
   sans indication... ;

Exercice 61
x est une fonction de la variable t, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

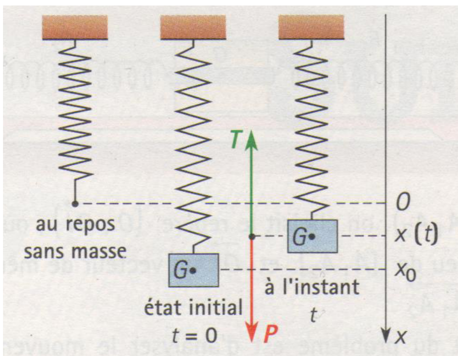
$$x'' - 3x' + 2x = te^t. \quad (1)$$

1. Intégrer l'équation homogène associée.
2. On cherche une solutiuon particulière x_p de la forme $t \mapsto z(t)e^t$, où z est une fonction à déterminer. Pour ce faire :
   a. montrer que z est solution de l'équation différentielle : $z''(t) - z'(t) = t. \quad (2)$;
   b. déterminer un polynôme du seconde degré solution de (2) ;
   c. En déduire x_p.
3. Donner la solution générale de (1).
4. Dire s'il existe une fonction f, à préciser éventuellement, telle que :
   - f soit solution de (1)
   - dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, la représentation graphique de f soit tangente à l'axe des abscisses.

Exercice 62

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f'(0) = 0$.
3. Montrer que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
4. Pour tout nombre réel x, on définit la fonction h par $h(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}\cos 2x$. Calculer $h''(x)$.
5. QCM
   a. Quelle est la valeur de $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   A. 3 B. $-\dfrac{1}{4}$ C. $\frac{11}{3}$
   b. Quelle est la moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$? A. $\dfrac{3}{\pi}$ B. 0 C. $\frac{6}{\pi}$
   c. Combien l'équation $h(x) = 0$ admet-elle des solutions dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$?
   A. 1 B. 1 C. 0.

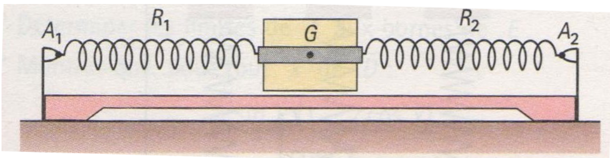
Exercice 63
Un solide de masse $m = 0,5$ kg, de centre d'inertie G, est suspendu à un ressort de coefficient de raideur $k = 10^3$N.m^{-1}.
On note $x(t)$ l'abscisse du point G à l'instant t.



Le théorème du centre d'inertie donne, pour tout réel t positif, $x''(t)+\dfrac{k}{m}x(t)=g$.
Déterminer l'équation horaire du mouvement du solide sachant qu'à l'instant $t=0$ l'abscisse du point G est égale à 2 cm et la vitesse est nulle.

Exercice 64

Un palet à coussin d'air de masse m et de centre de gravité G, mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2 de constante de raideur k tendus entre deux points A_1 et A_2.
On se propose d'étudier le mouvement sur la droite (A_1A_2) du point G autour de sa position d'équilibre, mouvement supposé d'amplitude faible devant la longueur A_1A_2.



Sur (A_1A_2) on choisit le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\right)$, où O est le milieu de $[A_1A_2]$ et $\overrightarrow{OI}$ un vecteur de même sens que $\overrightarrow{A_1A_2}$.
Le but du problème est d'analyser le mouvement de G en étudiant la fonction f définie telle que l'abscisse y du point G dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\right)$, à l'instant t exprimé en secondes, soit définie par $y=f(t)$.

A. On suppose dans cette partie que les frottements sont négligeables. On écarte le palet de sa position d'équilibre. On le lâche sans vitesse initiale.
On constate alors que G oscille autour de sa position d'équilibre. On admet que la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et associé au mouvement de G vérifie la relation $f''(t)+64f(t)=0$ et obéit aux conditions initiales $f(0)=2$ et $f'(0)=0$.

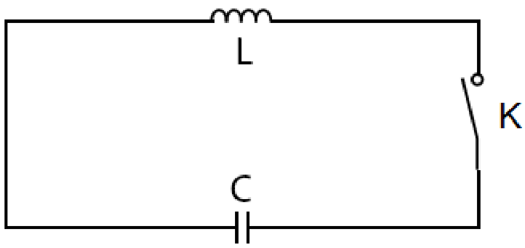
1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y''+64y=0.$$
2. Détemriner la fonction f associée au mouvement de G, c'est-à-dire la fonction f définie que $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle précédente et vérifiant les conditions $f(0)=2$ et $f'(0)=0$.
3. Résoudre $f(t)=0$.
En déduire à quels instants G passe en 0. Donner une valeur approchée à 0,01 s près de l'instant du premier passage en 0 après l'instant $t=0$.
Donner également un valeur approchée à 0,01 s près du temps séparant deux passages consécutifs en 0.

B. On suppose maintenant que les frottement ne sont pas négligeables et que la vitesse initiale n'est pas nulle. On admet que la fonction associée au mouvement de G est alors la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
$$g(t)=2\mathrm{e}^{-5t}(1+8t).$$

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g admet une asymptote horizontale que l'on précisera.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et étudier sont signe sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $g'(0)$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g et la droite T dans un repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ d'unités graphique 10 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.
6. Expliquer pourquoi l'équation $g(t)=2$ admet une solution α comprise entre 0,1 et 0,2

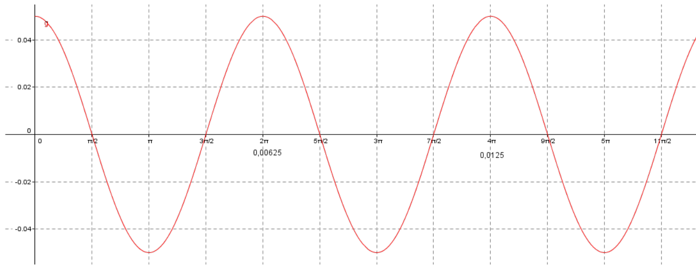
Exercice 65

On veut étudier la charge q d'un condensateur dans un circuit fermé comprenant en série :
• le condensateur de capacité $C=25\times10^{-6}$ farad ;
• une bobine d'inductance $L=1{,}6$ henrys ;
• un interrupteur K.



On appelle $g(t)$ la charge du condensateur à l'instant $t (t\in\mathbb{R}^+)$.

1. **Détermination expérimentale de la fonction q**
La courbe ci-dessous représente les variations de la fonction q.



A l'aide du graphique, déterminer les réel k,ω et φ tels que :
pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $q(t)=k.\cos(\omega t+\varphi)$.
2. **Détermination théorique de la fonction q**
La loi d'Ohm, appliqué au circuit, donne l'équation différentielle :
$$q''(t)+\frac{1}{LC}q(t)=0,\ \text{avec}\ t\in[0\,;\,+\infty[.$$
À l'instant $t=0$, la charge du condensateur est de 5×10^{-3} coulombs et l'intensité est nulle. (On rappelle que $i(t)=q'(t)$.) Déterminer la charge q du condensateur en fonction de t.