Loi uniforme

Exercice 67.
Simuler une loi uniforme sur les intervalles suivants :

1. $I = [2\ ;\ 5]$;
2. $J = [4\ ;\ 10]$;
3. $K = [5\ ;\ 11]$.

Exercice 68.
Soit a et b deux nombre réels tel que $a < b$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que f est positive sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
4. la fonction f est -elle une densité ? Justifier.

Exercice 69.
On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[2\ ;\ 6]$.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 2 et 4 ?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 3 ?

Exercice 70.
Lors de la restitution des notes d'une interrogation notée sur 20, le professeur annonce que suite à de nombreuses tricheries, il a décidé de noter chaque élève aléatoirement entre 5 et 15.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève ait un note supérieur à 12 ?
2. Quelle note (moyenne) un élève peut-il espérer obtenir ?
3. Un élève qui n'a pas triché est effondré à l'annonce de ce système de notation. Il espérait avoir une note supérieure à 14. Pour le rassurer, le professeur lui indique que sa note est supérieur à 12. Quelle est la probabilité que sa note soit supérieur à 14 sachant qu'elle est supérieur à 12.

Exercice 71.
Dans un parc national, un guide accompagne chaque soir un groupe pour observer les zébus venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil.
On suppose que le temps d'attente du groupe avant l'arrivée des animaux est compris entre 0 et 2 heures 30 ; on le modélise, en minutes, par la variable aléatoire T de loi uniforme sur $[0\ ;\ 150]$.

1. **a.** $P(T = 20)$ **b.** $P(T < 45)$ **c.** $P(45 \leqslant T \leqslant 60)$ **d.** $P(T > 90)$
2. Le groupe attend en vain depuis 50 minutes.
   Quelle est la probabilité d'avoir $T \leqslant 60$?

Loi normale

Exercice 72. Une étude a été menée sur des sportifs amateurs de course à pied de catégorie 3 (pratiquant 2 à 4 fois par semaine). D'après cette étude, la fréquence cardiaque maximale (FCM) d'un tel sportif suit une loi normale de paramètre $\mu = 188$ et $\sigma 6,95$.
Quelle est la probabilité qu'un tel sportif choisi au hasard ait une FCM comprise entre 179 et 180 ?

Exercice 73. Une étude sur le teck (arbre recherché pour la qualité de son bois) affirme que cinq années après sa plantation, la hauteur en mètres d'un tel arbre suit une loi normale de paramètres $\mu = 23$ et $\sigma = 1,5$.
Suite à des relevés, la propriétaire d'un exploitation de teck sur son exploitation est de 20 m, et celle du plus petit des teck est 16 m. Doit-elle s'inquiéter de la croissance des teck plantés sur son exploitation ?

Exercice 74. Le test la plus employé actuellement pour mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) standard de David Wechsler.
On appelle X la variable aléatoire jqui à toute personne choisie au hasard associe son Q.I. mesuré à l'aide de ce test. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 15$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un Q.I. entre 90 et 110 ?
2. Sans la calculatrice, préciser la probabilité (arrondi au millième) qu'une personne choisi au hasard ait un Q.I. supérieur à 130 ?

Exercice 75. Le taux d'hématocrite (en %) est la volume occupé par les globules rouges dans les sang. Ce taux pour les hommes) est supposé suivre la loi normale de paramètres $\mu = 45,5$ et $\sigma = 3$. Il est considéré *normale* s'il se situe dans l'intervalle $[39,5\ ;\ 51,5]$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un taux d'hématocrite *normale* ?
2. Lors d'un contrôle antidopage, le taux d'hématocrite du vainqueur du tour de France 1996 aurait été supérieur à 60. Était-ce suspect ? Justifier à l'aide d'un calcul.

Exercice 76. Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesuré en mm.
On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 1,6 et on suppose que la variable l qui à chaque plaquette prélevée au hasard dans la production associe sa largeur suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart-type 1,2.

1. On tire au hasard dans la production une plaquette.

Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 et 43 ?

Quelle est le probabilité d'obtenir un largeur comprise 22 et 28 ?

2. Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 et 43 mm et si sa largeur est comprise en 22 et 28 mm. En admettant que L et l sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette acceptée ?

Exercice 77. Une machine fabrique des pièces de forme circulaire en série. A chaque pièce de forme tirée au hasard dans la production, on assoie son diamètre x exprimé en millimètres. On définie ainsi un variable aléatoire X. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 1$ (en mm).

Pour être utilisable, une pièce doit satisfaire à la norme suivante : $31 \leqslant x \leqslant 33$.

1. Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit soit utilisable ?
2. Prix moyen de fabrication.

   Le coût de fabrication d'une pièce est noté f.

   Dans un lot de 100 pièces fabriquées dont le coût de fabrication est donc $100f$, $100p$ seulement d'entre elles sont utilisables ; il en résulte que le prix moyen M de fabrication est :

   $$M = \frac{100f}{100p} = \frac{f}{p}.$$

   a. Calculer le prix moyen de fabrication avec la machine précédente si $f = 10,80$ €.

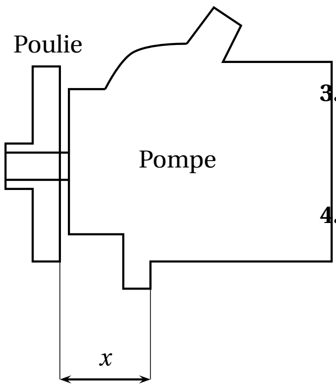
      Pour diminuer le pourcentage de pièces défectueuses, on pourrait utiliser une machine plus moderne : l'écart type serait de 0,5 mm et X suivrait une loi normale $\mathcal{N}(32\ ;\ 0,5)$, mais le coût de fabrication f_2 serait alors de 12 €avec cette nouvelle machine.

   b. Calculer, pour cette nouvelle machine, la probabilité p_2 qu'une qu'une pièce soit utilisable.

   c. Déterminer le prix de revient moyen M_2 de fabrication pour cette nouvelle machine. En déduire la machine que l'on aurait intérêt à choisir.

Exercice 78.

Un atelier d'une usine d'automobiles est chargé de l'assemblage d'un moteur. Dans cet exercice on s'intéresse au contrôle de qualité de l'emmanchement d'une poulie sur une pompe de direction assistée. Cet emmanchement est contrôlé par la mesure, en millimètres, de la cote x apparaissant sur la figure ci-contre



L'installation de la poulie est considérée comme conforme lorsque la cote x appartient à l'intervalle $[39,85\ ;\ 40,15]$.

On note X la variable aléatoire qui à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production, associe sa cote x. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type $0,06$.

Calculer la probabilité que la cote x d'un ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production soit conforme.

Approximation de la loi Binomiale par la Loi normale

Exercice 79. Soit X une variable aléatoire suivant un loi binomiale $\mathscr{B}(100\ ;\ 0,2)$. En utilisant une approximation de cette loi par la loi normale dont on précisera les paramètres, calculer une valeur approchée de $P(X = 20)$, $P(X \leqslant 20)$, $P(18 \leqslant X \leqslant 22)$ et de $P(X > 18)$

Exercice 80. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

En France aujourd'hui, on estime à 0,512 la probabilité qu'un bébé à naitre soit un garçon. Sur une année, on prévoit 820 000 naissance environ.

Quelle est la probabilité que parmi 820 000 nouveau-nés, le nombre de garçon dépasse 420 000 ?

Exercice 81. Surbooking

Une compagnie aérienne estime à $0,1$ la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.

Sur le vol MA 2012, l'avion a une capacité de 300 places. Pour optimiser son remplissage, la compagnie a accepté plus de 300 réservations. Ce faisant, elle court le risque que se présentent à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé, auquel cas elle devra indemniser ceux qui ne pourront embarquer.

On note n le nombre de réservations acceptées par la compagnie, et X la variables aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant réservé qui se présentent à l'embarquement. On suppose les comportements des clients indépendants les uns des autres

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
2. Justifier que cette loi binomiale peut être approché par une loi normale dont vous préciserez les les paramètres.
3. On suppose dans cette question que $n = 324$.

   Quelle probabilité que la compagnie ne puisse pas embarquer tous les passagers qui se présentent ?
4. La compagnie souhaite limiter à 1 % le risque de ne pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent.

   Déterminer le nombre maximum de places qu'elle peut proposer à la réservation.