I) Série en général

A) Séries géométriques

Définition : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0, on appelle série géométrique la suite (S_n) définie pour tout entier naturel par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Théorème : Lorsque $q \neq 1$:

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarque : si $q = 1$, on peut définir la suite (S_n) pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} u_i = (n+1)u_0.$$

On étudie ensuite la convergence de celle-ci lorsque $n \to +\infty$.

Propriété : La suite (S_n) :

- Converge lorsque $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

- Diverge lorsque $q \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = (\text{signe } (u_0))\infty.$$

- Diverge lorsque $q \leq -1$: la limite de la suite est indéterminée.

Propriété : Soit x un réel ou complexe on peut définir une nouvelle identité remarquable :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Remarque : Le développement limité de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$ à l'ordre n est donné par la formule :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Plus tard on parlera de série entière en disant que pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

B) Séries de Riemann

Définition : On définit les séries de Riemann R définie pour un réel α par :

$$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

La série harmonique est la série de Riemann pour $\alpha = 1$,

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Propriété : Le nombre R existe et est fini si et seulement si :

$$\alpha > 1.$$

II) Série trigonométrique et série de Fourier

Définition : Soient (a_n) et (b_n) 2 suites de nombres réels ou complexes. On appelle série trigonométrique toute série dont le terme général est de la forme :

$$U_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

A) Cas des fonctions de période 2π

Considérons la série $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. On suppose que cette série converge vers $f(x)$.

On peut alors écrire, pour les valeurs de x pour lesquelles la série converge vers $f(x)$:

$$f(x) \ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

appelé développement en série de Fourier de f

Théorème : Pour une fonction f de période 2π,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

<u>Remarque</u> : a_0 est la valeur moyenne du signal sur une période. $a_n$et b_n sont les amplitudes des différentes harmoniques. On peut aussi écrire les intégrales sur n'importe quel intervalle d'amplitude 2π.

<u>Exemple</u> : Soit f 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, \pi[\\ 1 \text{ si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

Calculons les coefficients de Fourier de f puis donnons son développement en série de Fourier avec 3,5 puis 7 harmoniques.

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}[t]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \pi) = \frac{1}{2}.$

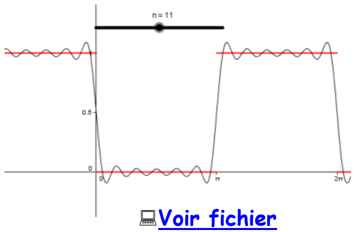
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{\pi n}(\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{\pi n}(-\cos(2n\pi) + \cos(n\pi))$$

$$= \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n}$$

On écrit alors le développement en série de Fourrier de la fonction f :

$$S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n}\sin(nt).$$



Voir fichier

Le développement en série de Fourrier de f pour :

- 3 harmoniques : $f(t) = \frac{1}{2} - 2\frac{\sin t}{\pi} - 2\frac{\sin(3t)}{3\pi}$
- 5 harmoniques : $f(t) = \frac{1}{2} - 2\frac{\sin t}{\pi} - 2\frac{\sin(3t)}{3\pi} - 2\frac{\sin(5t)}{5\pi}$
- 7 harmoniques : $f(t) = \frac{1}{2} - 2\frac{\sin t}{\pi} - 2\frac{\sin(3t)}{3\pi} - 2\frac{\sin(5t)}{5\pi} - 2\frac{\sin(7t)}{7\pi}$

B) Cas d'une fonction de période T

Définition 2 : Soient f une fonction de période T. On appelle pulsation la valeur $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Sous réserve que la série $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}\big(a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\big)$ converge vers f on écrit alors $f(x) \;= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ appelé développement en série de Fourier de f

Théorème : Pour une fonction f :$\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, continue, de période T :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi écrire les intégrales sur des intervalles $[0\,,T]$, $[a, a+T]$,…

C) Cas particulier.

➔ f est une fonction paire :

Si f est T-périodique et paire (signal symétrique par rapport à (Oy)) alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\;\; b_n = 0 \;\;\text{et}\;\; a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx,\;\; a_o = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx\;.$$

On dit que f est développable en une série de cosinus.

➔ f **est une fonction impaire :**

Si f est T −périodique et impaire, (signal symétrique par rapport à O), alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

On va maintenant voir à quelles conditions la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

converge et le lien entre sa limite et la fonction f.

III) Conditions de Dirichlet – Formule de Parseval

Propriété : Soit f une fonction T-périodique. Elle est développable en série de Fourier (la série associée à f convege) si :

- f est continue et dérivable (sauf en un nombre fini de points par période).
- f' est continue (sauf en un nombre fini de points par période)
- f et f' admettent des limites à gauche et à droite aux points de discontinuité éventuels

Définition : Une fonction vérifiant les conditions de Dirichlet est dite C^1 par morceaux sur chaque période.

<u>Remarque</u> : C^1 signifie que la fonction est <u>dérivable</u> et la fonction dérivée est <u>continue</u>.
par morceaux veut dire sauf en nombre <u>dénombrable</u> de points.

Théorème de Dirichlet : Soit f T-périodique satisfaisant les conditions ci-dessus. Alors en tout point x_0 où f est C^0, la série de Fourrier associée à f converge vers $f(x_0)$. En tout point x_0 où f n'est pas continue, la série de Fourrier associée à f converge vers $\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ ou $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Théorème (Formule de Parseval) : Soit f T-périodique satisfaisant aux conditions de Dirichlet et dont le développement en série de Fourier est : $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Alors $\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t)dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

Définition : Cette expression est le carré de la valeur efficace de f sur une période. Elle se note f_{eff}^2 ou V_{eff}^2

<u>Remarque</u> : On peut intégrer sur tout intervalle de longueur 2π. Utile car permet de calculer la somme de certaines séries numériques dont on pouvait prévoir la convergence.

En physique, on note souvent $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$. On peut alors écrire

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = A_n \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega x) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega x)\right]$$

on a

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = A_n \cos(\varphi_n - n\omega x)$$

Le développement en série de Fourier peut s'écrire

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\varphi_n - n\omega x)$$

La formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

IV) Développement en série de Fourier sous forme complexe.

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier complexes par : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$

Théorème : Lien entre les deux types de coefficient :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = c_n + c_{-n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = i(c_n - c_{-n})$

ii) $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Conséquence : La série de Fourier de f peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \times e^{inx}$

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique, continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier complexes par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega t}\, dt.$$

Remarque : On a les mêmes relations que le théorème précédent.

Conséquence : La série de Fourier de f peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega x} c_n.$