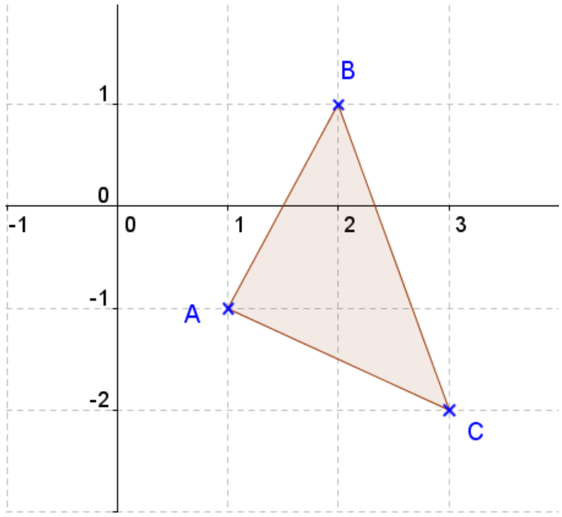
Activité de démarrage



Dans un repère orthonormée $(O\,;I\,;J)$ on considère trois points $A(1\,;\,-1)$, $B(2\,;1)$ et $C(3\,;\,-2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

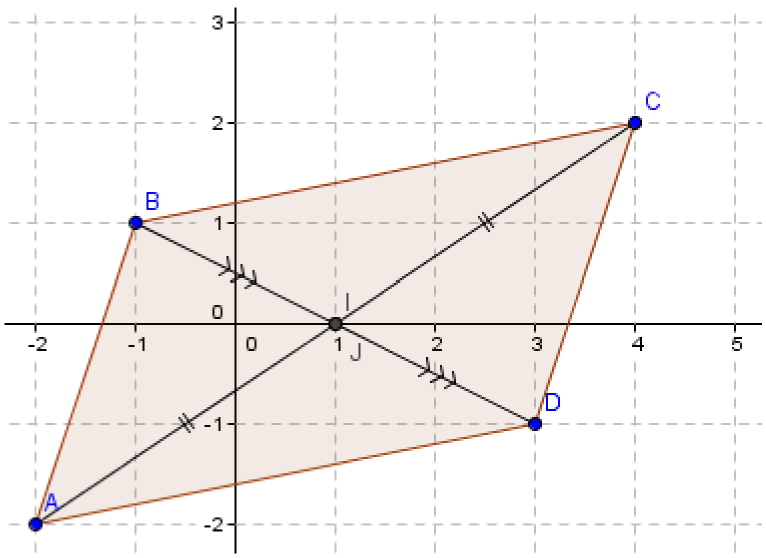
Après avoir fait le graphique, on conjecture que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Pour la démonstration, nous calculons le carré des longueurs AB, AC et BC :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (2-1)^2 + \big(1-(-1)\big)^2 \\ &= 1+4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient $AC^2 = 5$, ce qui prouve que le triangle ABC est isocèle en A.
Et $BC^2 = 10$, ce qui prouve par le théorème de Pythagore ($BC^2 = AB^2 + AC^2$) qu'il est rectangle A.
Donc la conjecture est bien démontré, le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Activité 2



Soient quatre points :
$A(-2\,;\,-2), B(-1\,;1), C(4\,;2)$ et $D(3\,;\,-1)$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On conjecture que ce quadrilatère est un parallélogramme.

On calcul les coordonnées de I milieu de $[AC]$:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

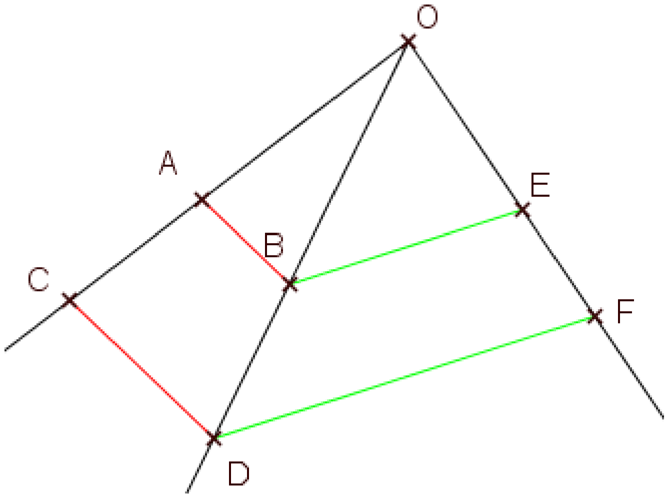
Donc les coordonnées de $I(1\,;0)$. Ensuite on calcul les coordonnées de J milieu de $[BC]$:

$$\begin{cases} x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de J sont $J(1\,;0)$.
Donc les points I et J sont confondus, donc les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

Activité 3

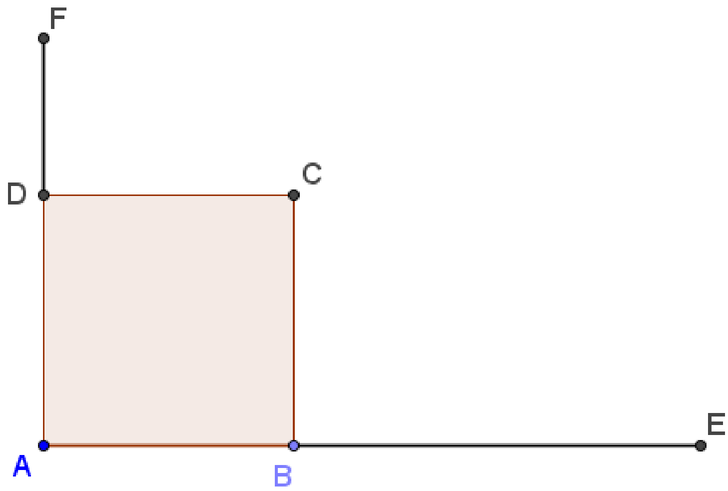
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Et les droites (BE) et (DF) sont parallèles.
Montrer que les droites (AE) et (CF) sont parallèles.



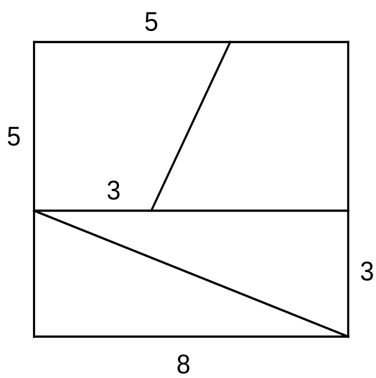
Activité 4

ABCD est un carré de côtés 8 cm.
Les points A, B et E sont alignés.
Les points A, D et F sont alignés.
DF = 5 cm et BE = 13 cm.

Les points E, F et C sont-ils alignés ?

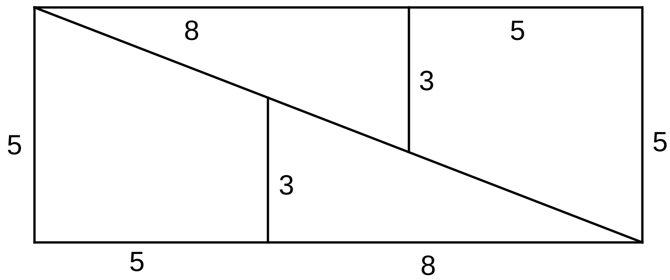


Activité 5



Léonard a construit un carré de 8 sur 8 qu'il a découpé suivant les traits de la figure ; en réassemblant les pièces il obtient un rectangle de 13 sur 5 et en conclut que 64 = 65.

Johan lui dit que ce n'est pas possible (et vous serez sûrement d'accord avec lui) ; il réussit à le lui montrer. Pouvez-vous y arriver ?



I. Rappel des principaux théorèmes

a. Le théorème de Pythagore

Théorème : Le triangle ABC est rectangle en A **si et seulement si**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Remarque : Le théorème et sa réciproque forme une **équivalence**.

b. Les propriétés de Thales

Théorème et « réciproque » : Soit un triangle ABC. M un point de (AB) et N un point de (AC) distincts de A.

- Si (BC) et (MN) sont parallèles, alors AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors (BC) et (MN) sont parallèles.

II. Propriétés de géométrie analytique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$,

a. Distance entre deux points.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. La longueur du segment $[AB]$ est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

b. Milieu de deux points.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. Les coordonnées de $I(x_I\,;y_I)$ milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$