VI. Coloration de graphe

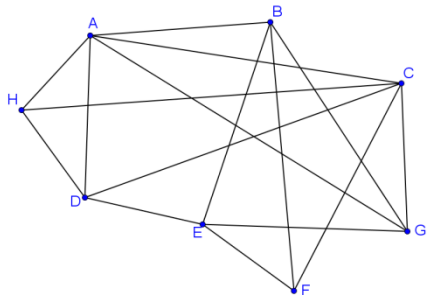
Problème : *A, B, C, E, F, G et H désignent 8 espèces de poissons.*
On sait que :

- *A ne peut pas vivre avec B, C, D, G, H*
- *B ne supporte pas A, E, F, G*
- *C ne peut pas cohabiter avec A, D, F, G, H*
- *D est incompatible avec A, C, E, H*
- *E ne supporte pas* B, D, F, G
- *F cohabite uniquement avec A, D, F, G, H*
- *G ne peut vivre qu'avec D, F, G, H*
- *H est compatible seulement avec B, E, F, G*

La situation peut être représentée par le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Combien faut-il d'aquarium au minimum ?



On peut représenter ce tableau par un graphe dont les sommets correspondent aux espèces, et les arêtes aux cohabitations impossibles :

Définition : Colorier un graphe, c'est associer à chaque sommet une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes.
Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier ce graphe.

Remarque importante: Si un graphe est complet, son nombre chromatique est égal à son ordre. En effet, chaque sommet est adjacent à tous les autres. Il faut donc une couleur différente pour chaque sommet, et bien entendu, cela suffit.

Pour résoudre notre problème, on utilise l'algorithme de coloriage d'un graphe qui suit :

Algorithme de Welsh Powell :

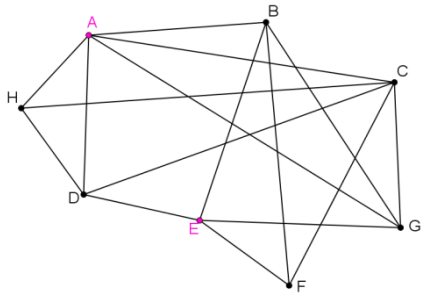
- Numéroter les sommets dans l'ordre des degrés décroissants
- Tant qu'il reste des sommets à colorier :
  - Choisir une nouvelle couleur (appelée couleur courante)
  - Chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non colorié et le colorier avec la couleur courante
  - Colorier avec la couleur courante et en respectant leur ordre, tous les sommets non coloriés non adjacents au dernier sommet colorié et non adjacents entre eux.

Remarque : cet algorithme ne fournit pas nécessairement le nombre minimal de couleurs, il donne une majoration.

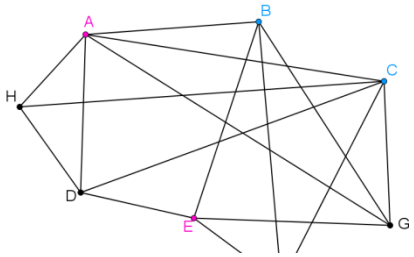
Mise en œuvre de l'algorithme de Welsh Powell

On numérote les sommets dans l'ordre des degrés décroissants : A, C, B, D, E, G, F, H
(remarque : il y a plusieurs façons de procéder car il y a des sommets de même degré)

1) *On choisit la couleur rose. On colorie A en rose, et on regarde les autres sommets suivant l'ordre ci-dessus*
C, B, D sont adjacents à A, donc on ne les colorie pas
E n'est pas adjacent à A, donc on le colorie en rose
G est adjacent à A, donc on ne le colorie pas
F n'est pas adjacent à A, mais il est adjacent à E (qui est désormais en rose), donc on ne le colorie pas
H est adjacent à A, donc on ne le colorie pas

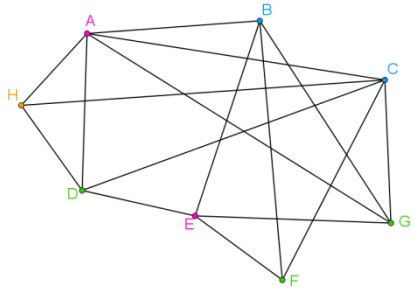


2) *On choisit la couleur bleu. On colorie C en bleu.*
B n'est pas adjacent à C, donc on le colorie en bleu
D est adjacent à C, donc on ne le colorie pas
G, F, H sont adjacents à C, donc on ne les colorie pas



3) *On choisit la couleur vert. On colorie D en vert.*
G n'est pas adjacent à D, donc on le colorie en vert
F n'est pas adjacent à D, ni à G, donc on le colorie en vert
H est adjacent à D, donc on ne le colorie pas.

4) *On choisit la couleur orange. On colorie G en orange.*
Donc le nombre chromatique γ est inférieur ou égal à 4.



Théorème : Le nombre chromatique d'un graphe G est :
1) supérieur ou égal à l'ordre du plus grand sous-graphe complet de G ;
2) inférieur ou égal à $r+1$ où r est le plus grand degré des sommets de G .

Réponse au problème : Pour notre problème, on en déduit donc que $\gamma \geq 4$ car le sous-graphe ACDH est complet et d'ordre 4. D'où $4 \leq \gamma \leq 4$ ie : $\gamma = 4$. Ainsi il faut 4 aquariums pour qu'il n'y ait pas de soucis de cohabitation.