

I. Généralité

a. L'ensemble de définition

Définitions : On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f l'ensemble des valeurs possédant une image par f .

Remarque : Elle provient de la modélisation faite du problème.

Exemples mathématiques :

La fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$ est définie sur \mathbb{R} .

La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur \mathbb{R}^* .

La fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$ est définie sur \mathbb{R}^+ .

Note : l'ensemble \mathbb{R} représente tous les nombre réels (exemple : 0 ; -1 ; $\sqrt{2}$; π ; 1,4 , 10^{10} etc ...)

b. Les variations

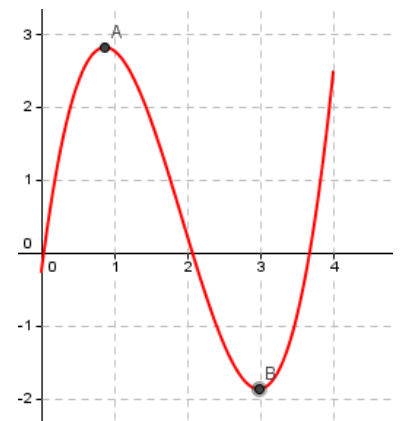
i. Extrémum d'une fonction sur un intervalle

Définitions : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , on appelle extrémum de f sur I :

- Un maximum M réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- Un minimum m réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Exemple : On a tracé la fonction g ci-dessous :

Dans le menu CALCUL les fonctions maximum et minimum permette d'en trouver une approximation.



ii. Sens de variation d'une fonction sur un intervalle (monotonie)

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et pour tous a et b deux réel de I tel que $a < b$:

- $f(a) < f(b)$, on dit que la fonction f est **croissante**.
- $f(a) > f(b)$, on dit que la fonction f est **décroissante**.
- $f(a) = f(b)$, on dit que la fonction f est **constante**.

Exemple : Sur l'exemple précédent, la fonction g est croissante décroissante, puis croissante. On représente ces informations sous forme d'un tableau de variation :

x	0	0.9	3	4
$f(x)$	0	2.9	-1.9	2.5

c. Limites

i. Théorèmes générale

Théorème 1 : (somme de fonction) Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ vers b alors $f(x) + g(x)$ tend vers $a + b$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x) + g(x)$ c'est une forme indéterminée.

Exemples : Soient trois fonctions définies sur leurs domaines de définition respectifs :

$$f(x) = x^2 - 2x - 14 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \mathcal{D}_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 14) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 14) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0^+$$

Théorème 2 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers b , alors $f(x) \times g(x)$ tend vers ab .
- Si $f(x)$ tend vers a (avec $a \neq 0$) et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon le signe de a .
- Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon la règle du produit.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x) \times g(x)$ c'est une forme indéterminée.

Théorème 3 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que u ne s'annule pas sur I .

- Si $u(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers 0.
- Si $u(x)$ tend vers un réel a non nul, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $\frac{1}{a}$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et est strictement positif sur I , alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et strictement négatif sur I , alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $-\infty$.

Exemple : Limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$:

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et positive sur $[0 ; +\infty[$, sa limite en 0 est 0.

On déduit du théorème précédent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

ii. Cas des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini

Activité : Soit les fonctions f , g et h , définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{-x^2 + 2x - 7}, \quad g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} \text{ et } h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

Déterminer les limites quand x tend vers $+$ et vers $-\infty$.

d. Comportement asymptotique

i. Asymptotes horizontales

Définition : Soient une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ (respectivement $] -\infty ; a]$) avec a un réel et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

Lorsque la fonction f admet pour limite en $+\infty$ (r. en $-\infty$) un réel k ; c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k, \left(\text{r. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \right)$$

On dit que la droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ (r. $-\infty$).

ii. Asymptotes verticales

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ (ou $] -\infty ; a[$) avec a un réel et \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

Lorsque la limite de f en a est égale à $\pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

iii. Asymptotes obliques

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ (ou $] -\infty ; a[$) avec a un réel et \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

Lorsque la limite de $(f - y)$ en $\pm \infty$ est égale à 0 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f .

Activité : Donner les asymptotes des fonctions f , g et h de l'activité précédente.

e. Nombre dérivé et fonction dérivée

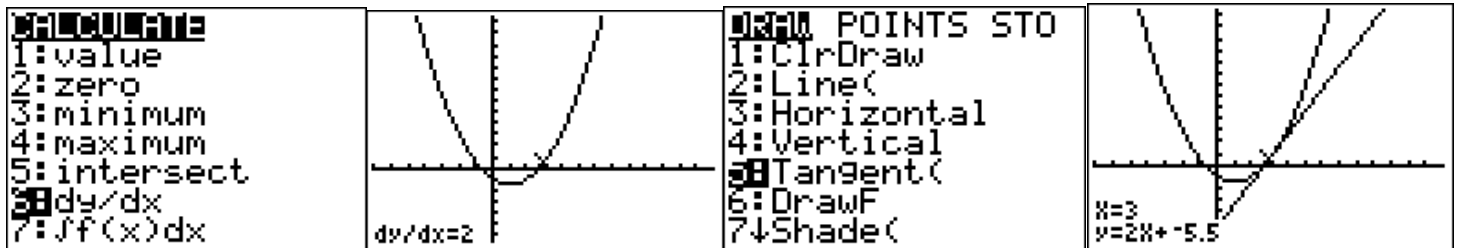
i. Nombre dérivé en a

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I . On appelle nombre dérivé en a , le coefficient directeur de la tangente à f en le point d'abscisse a .

Exemple : On a représenté une fonction, faites bouger l'abscisse a du point M , on a affiché le coefficient directeur de la tangente. ([lien](#)),

Sur la calculatrice, dans le menu CALCUL (image 1 et 2) il est possible de faire afficher le nombre dérivé d'une fonction en un point (3 sur l'exemple : $f'(3) = 2$).

En allant dans le menu DESSIN (image 3 - 4) on peut faire afficher la tangente à la courbe ainsi qu'une équation de cette tangente ($y = 2x - 5,5$)



(bouger le point b) Remarque : Le nombre dérivé au point d'abscisse $A(a; f(a))$ est la limite des coefficients directeurs de la droite (AB) lorsque B se rapproche de A .

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ii. Fonctions dérivées

a) Fonction de références

Théorèmes : Soient k, a et b des constantes réelles et n un entier naturel non nul.

Ensemble de définition de f	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^+	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}^{*+}
$f(x)$	k	$ax + b$	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	\sqrt{x}	$\cos x$	$\sin x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\sin x$	$\cos x$	e^x	$\frac{1}{x}$
Ensemble de définition de f'	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^{*+}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}

b) Opérations sur les fonctions

Théorèmes : Soient u et v deux fonctions de la variable x dérivables sur un intervalle I , k une constante réelle et n un entier naturel non nul.

f	$u + v$	ku	$u \cdot v$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	u^n	$\cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
f'	$u' + v'$	ku'	$u'v + uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$n u' u^{n-1}$	$-a \sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$

c) Composition de fonctions

Théorème : Soient une fonction u définie et dérivable sur I un intervalle réel et n un entier naturel non nul. Pour tout réel $x \in I$

$$((u(x))^n)' = n \times u'(x)(u(x))^{n-1}.$$

Théorème : Soit une fonction u définie et dérivable sur I un intervalle réel. Pour tout réel $x \in I$

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Théorème : Soit une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur I un intervalle réel. Pour tout réel $x \in I$

$$(\ln(u(x)))' = u'(x) \ln(u(x)).$$

d) Variation et dérivée

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur I un intervalle réel.

Pour tout x d'un intervalle J_0 $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur J_0 .

Pour tout x d'un intervalle J_0 $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur J_0 .

f. Parité et périodicité

i. Parité

a) Fonction paire

Définition : On dit qu'une fonction f est **paire** si pour tout réel x du domaine de définition

$$f(-x) = f(x).$$

Propriété : La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : Les fonctions $x \mapsto 3x^2 + x^4$; $x \mapsto \frac{1}{x^4 + 7x^6}$; $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions paires.

b) Fonction impaire

Définition : On dit qu'une fonction f est impaire si pour tout réel x du domaine de définition

$$f(-x) = -f(x).$$

Propriété : La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point O .

Exemple : Les fonctions $x \mapsto x^3 + 2x^5$; $x \mapsto \frac{1}{x+2x^3}$; $x \mapsto \sin x$ sont des fonctions impaires.

ii. Périodicité

Définition : On dit qu'une fonction f est périodique de période T lorsque pour tout x réel du domaine de définition :

$$f(x + T) = f(x).$$

Propriété : Soit f une fonction de période T alors pour tout réel x du domaine de définition et pour tout entier naturel n :

$$f(x + nT) = f(x).$$

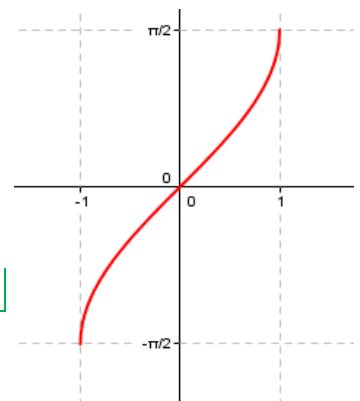
Exemples : Les fonctions circulaires \sin \cos sont périodiques de période 2π .

II. Fonction circulaire réciproque.

a. Fonction arcsin

Définition : La fonction arcsin est définie sur $[-1 ; 1]$ tel que pour tout $x \in [-1 ; 1]$ et pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ on ait :

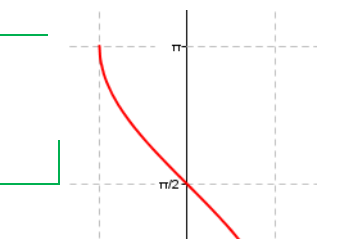
$$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(y)$$



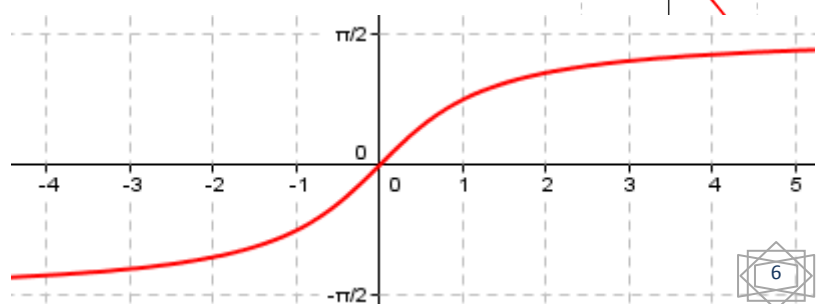
b. Fonction arccos

Définition : La fonction arccos est définie sur $[-1 ; 1]$ tel que pour tout $x \in [-1 ; 1]$ et pour tout $y \in [0 ; \pi]$ on ait :

$$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(y)$$



c. Fonction arctan



Définition : La fonction arctan est définie sur \mathbb{R} tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$

on ait :

$$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan(y)$$

Propriété : Pour tout nombres réels x ,

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$