

I. Rappel des généralités sur les probabilités

a. Vocabulaire

🔗 **Définition** : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne prédire le résultat.

L' **issue** d'une expérience aléatoire le résultat de celle-ci.

L'**évènement** une partie de l'univers Ω .

L'**univers** noté Ω (Oméga) l'évènement certain et l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Un **évènement élémentaire** est un évènement formé d'une seule issue de Ω .

b. Probabilité

🔗 **Définition** : La fréquence de réalisation d'une issue, lorsqu'une expérience aléatoire est reproduite un très grand nombre de fois, se stabilise autour d'un nombre P .

P est la **probabilité** de l'issue.

🔗 **Propriétés** (conséquences immédiates déduites de la définition de fréquence) :

- La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité de l'univers Ω est 1.
- La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires (ou issues) de Ω est égale à 1.

II. Equiprobabilité

🔗 **Définition** : Si les évènements élémentaires ont tous la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.

🔗 **Propriété** : Dans ce cas la probabilité d'un évènement élémentaire est :

$$P = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

La probabilité d'un évènement A est :

$$P = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

III. Intersection (\cap) et réunion (\cup) d'évènements.

🔗 **Définitions** :

L'évènement $A \cap B$ (A inter B) est formé des issues qui réalisent à la fois A et B .

L'évènement $A \cup B$ (A union B) est formé des issues qui réalisent A ou B .

Propriété : La probabilité de l'union de deux événements A ou B est donnée par la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

IV. Evènements incompatibles, évènements contraire

a. Evènements incompatibles

Définition : On dit que deux évènements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. On note $A \cap B = \emptyset$ (le vide).

Propriété : La probabilité de deux évènements incompatibles est nulle. ($P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$)

b. Evènement contraire

Définition : On appelle contraire d'un évènement A l'évènement noté \bar{A} (A barre) l'ensemble des évènements qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Remarque : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ d'où on déduit la propriété suivante :

Propriété : La probabilité de l'évènement contraire est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

V. Probabilité conditionnelle.

Définition : Soient A et B deux évènement, B étant de probabilité non nulle.

La probabilité de A sachant que B est réalisé (on dit A sachant B) est la nombre noté $P_B(A)$ (noté parfois $P(A|B)$), défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

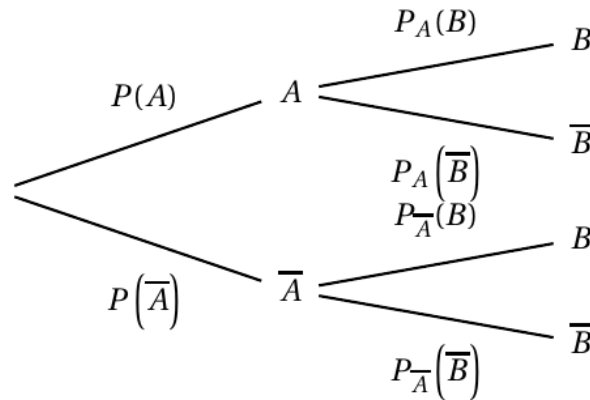
D'où on déduit les deux formules suivantes :

Propriété : Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles :

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \qquad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

VI. Probabilités conditionnelles et arbre de probabilité.

Soient A et B deux évènements, A et \bar{A} étant de probabilité non nulle. Alors la probabilité des évènements conditionnelles B sachant A , \bar{B} sachant A , B sachant \bar{A} et \bar{B} sachant \bar{A} se notent sur le deuxième étage des branches comme suit :



VII. Evènement indépendant.

Définition : On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Conséquences : si A et B sont indépendants alors

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{et} \quad P_A(B) = P(B).$$

Propriété : Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et \bar{B} ; \bar{A} et B ; \bar{A} et \bar{B} le sont aussi.

VIII. Variable aléatoire.

a. Variable aléatoire

Définition : On appelle variable aléatoire réelle le résultat d'une expérience lorsqu'il est représenté par un nombre réel. Autrement dit, une variable aléatoire réelle est une fonction X définie sur Ω à valeur dans \mathbb{R} :

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_k \mapsto X(\omega_k) = x_i \end{cases}$$

où $X(\Omega)$ est appelé univers image : c'est l'ensemble des valeurs prises par X .

b. Loi de probabilité

☞ **Définition** : Définir une loi de probabilité sur l'ensemble des n valeurs x_i , c'est associer à chaque x_i sa probabilité p_i .

c. Espérance d'une variable aléatoire

☞ **Définition** : On appelle espérance d'une variable aléatoire X et on note $E(X)$ la valeur moyenne de la variable X .

☞ **Propriété** : Soient X une variable aléatoire et a et b deux réels,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

d. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

☞ **Définition** : On appelle espérance d'une variable aléatoire X et on note $V(X)$ le réel strictement positif représentant la dispersion des valeurs prises par X .

☞ **Définition** : On appelle écart-type d'une variable aléatoire X et on note $\sigma(X)$ le réel définie par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : L'écart-type est dans la même unité que les valeurs de X .

IX. Loi binomiale

a. Epreuve de Bernoulli

☞ **Définition** : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : pile ou face, oui ou non, gagner ou perdre, etc.

On notera S le succès et E l'échec, les deux issues d'une épreuve de Bernoulli, on note en générale $P(S) = p$ et $P(E) = q = 1 - p$.

b. Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

☞ **Définition** : La variable aléatoire qui associe le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli réalisé un nombre n donné de fois de manière indépendante suit une loi binomiale.

☞ **Notation** : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n le nombre de fois que l'on réalise l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité du succès de cette épreuve.

On notera $P(X = k)$ la probabilité d'avoir k succès et $P(X \leq k)$ celle d'avoir au plus k succès.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, pour calculer la probabilité $P(X = k)$ nous utiliserons la calculatrice :

TI 82-83

Dans le menu « DISTR » (2sd VARS)

On utilise la fonction « binompdf(»

$$P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$$

Dans cette dernière fenêtre entrer

n le nombre de répétition
 p la probabilité du succès
et k le nombre de succès souhaités.

Casio

Dans l'écran d'accueil, le menu STAT

Touche F5 « DISTR »

Touche F5 « BINM » puis F1 « Bpd »

k , n et p et appuyer sur « CALC »

```
Binomial P.D
Data      : Variable
x         : k
Numtrial : n
P         : p
Save Res : None
Execute
|CALC
```

c. Propriété d'une variable suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Propriété : Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p ; l'espérance et la variance de la variable X est donné par les formules :

$$E(X) = n \times p,$$

$$V(X) = n \times p \times (1 - p).$$

d. Calcul d'évènement contraire ou complémentaire sur une loi de probabilité binomiale

Pour calculer la probabilité des évènements du type $X \geq 2$ on sera amené à utiliser l'évènement contraire : ici $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$

Explication : étant sur une loi de probabilité finie, l'univers image est :

$$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots n\}$$

L'évènement $\{X \geq 2\} = \{2 ; 3 ; 4 ; \dots n\}$.

et son contraire $\{\overline{X \geq 2}\} = \{0, 1\} = \{X \leq 1\}$.