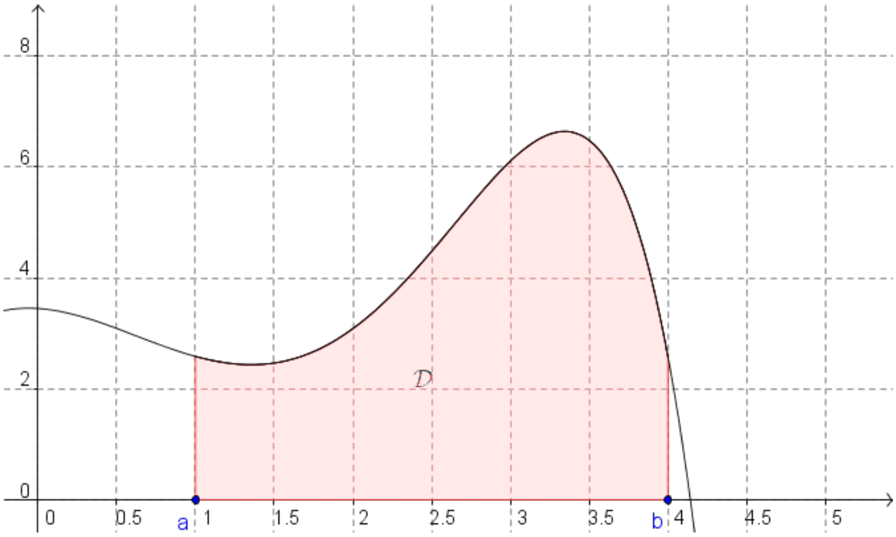
I. Définitions

Définition : On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle lorsque l'on peut la tracer d'un seul trait sur celui-ci.



Définition : Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.
On appelle intégrale de a à b de $f(x)$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et on note :

$$\mathcal{D} = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple de calcul approché d'une intégrale avec le solveur graphique de la calculatrice (TI):

$$\int_0^3 x^2 dx \simeq 9 \qquad \int_1^7 \ln x \, dx \simeq 7{,}62 \qquad \int_2^4 e^x dx \simeq 47{,}2$$

Théorème : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,,b]$, et F une primitive de f sur l'intervalle $[a\,,b]$:

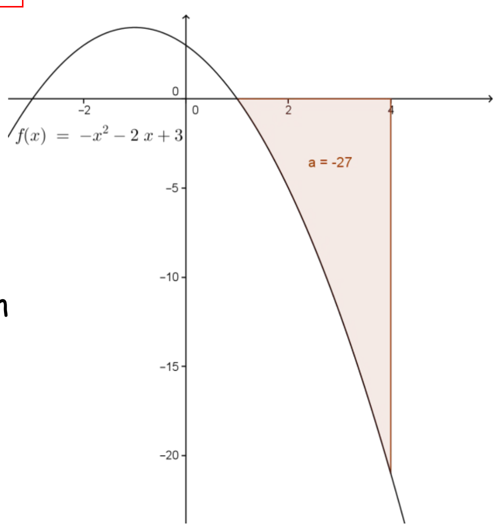
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple de calcul exact d'une intégrale :

1. $$\int_1^4 (-x^2 - 2x + 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_1^4$$

$$= -\frac{4^3}{3} - 4^2 + 3 \times 4 - \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \times 1\right] = -27.$$

Une intégrale négative signifie que le graphe de la courbe est en dessous de l'axe des abscisses :

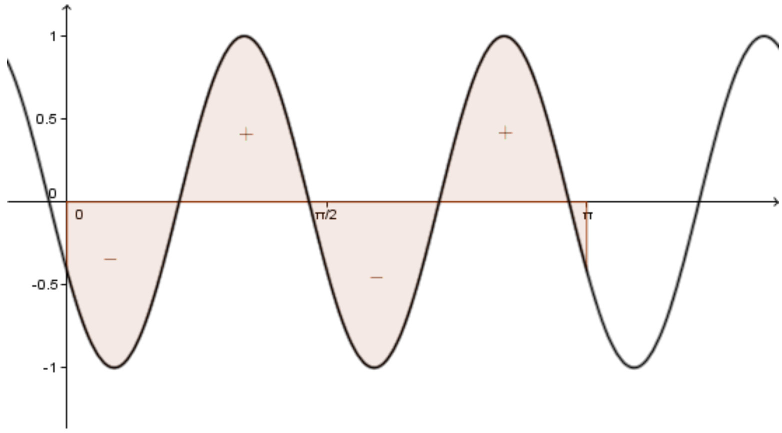


2.

$$\int_0^{\pi} \cos(4x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}\sin(4x+2\,)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\sin(4\times\pi+2) - \frac{1}{4}\sin(0\times x+2)$$

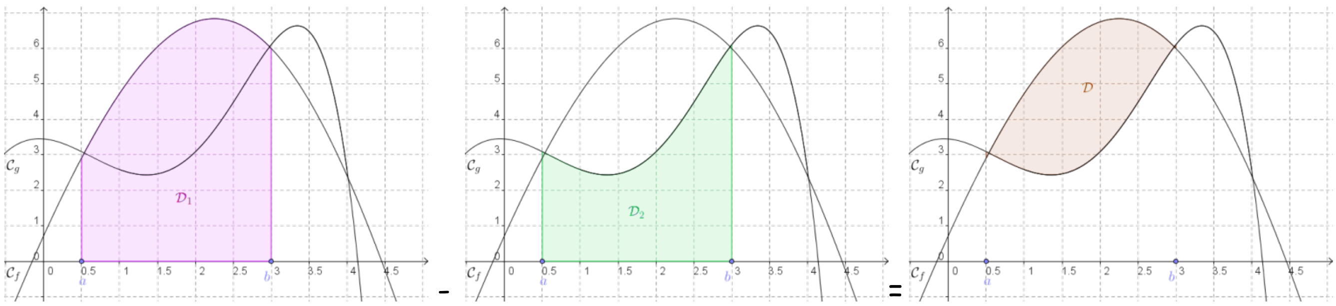
$$= \frac{1}{4}\sin 2 - \frac{1}{4}\sin 2 = 0.$$



L'aire obtenue est nulle, car on ajoute successivement une aire positive est une aire négative.

La périodicité de la fonction intégrée induit que sur tout intervalle d'amplitude $k\frac{\pi}{2}$, cette intégrale sera nulle.

II. Aire d'un domaine entre deux courbes



L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donné par l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ − l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$. D'où on déduit la propriété suivante.

Propriété : Soient f et g deux fonctions positives continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$ tel que : pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$ $f(x) \geq g(x)$. Alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les courbes représentative de la fonction f, celle de la fonction g, la droite d'équation $x = a$ et $x = b$ est donnée en unités du repère par :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

III. Propriétés

Propriété : Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Propriété : (Linéarité de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et λ un réel :

$$\int_a^b \big(f(x)+\lambda g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda\int_a^b g(x)dx.$$

Propriété : (Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, c un réel de l'intervalle $[a\,;\,b]$, et F une primitive de f sur l'intervalle $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

IV. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$, le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Propriété : Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$, et T sa période.

Alors quels que soient les réels a et b

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

La valeur moyenne m d'une fonction périodique de période T sur un intervalle de longueur T ; pour tout a dans $\mathbb{R}$,

$$m = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

V. Intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables admettant des dérivées continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux éléments de I, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 1 : Calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, \mathrm{d}x \, .$$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$, alors :

$$I = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos x \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exemple 2 : Calcul de :

$$J = \int_0^1 t \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \, .$$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \mathrm{e}^t \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \mathrm{e}^t \end{cases}$, alors :

$$J = [t\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e} - 1 + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} + 1.$$