I. Propriétés de géométrie analytique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$,

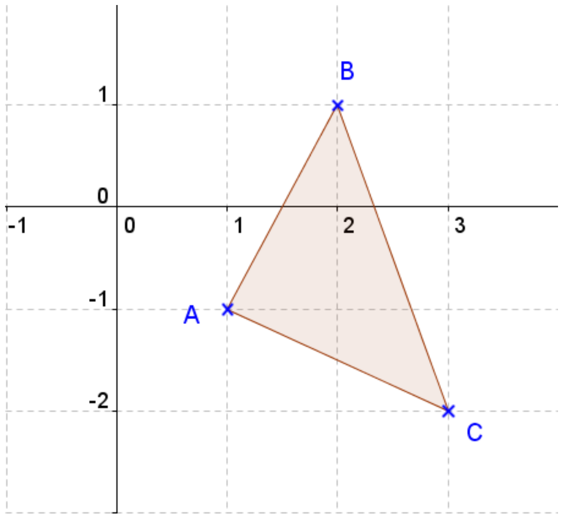
a. Distance entre deux points.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. La longueur du segment $[AB]$ est donnée par la formule :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Activité 1

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ on considère trois points $A(1\,;\,-1)$, $B(2\,;1)$ et $C(3\,;\,-2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?



Après avoir fait le graphique, on conjecture que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Pour la démonstration, nous calculons le carré des longueurs AB, AC et BC :

$$\begin{aligned}AB^2&=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\\&=(2-1)^2+\big(1-(-1)\big)^2\\&=1+4\\&=5.\end{aligned}$$

De la même manière on obtient $AC^2=5$, ce qui prouve que le triangle ABC est isocèle en A.
Et $BC^2=10$, ce qui prouve par le théorème de Pythagore ($BC^2=AB^2+AC^2$) qu'il est rectangle A.
Donc la conjecture est bien démontré, le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

b. Milieu de deux points.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. Les coordonnées de $I(x_I\,;y_I)$ milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule :

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}.$$

Activité 2

Soient quatre points : $A(-2\,;\,-2)$, $B(-1\,;1)$, $C(4\,;2)$ et $D(3\,;\,-1)$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On conjecture que ce quadrilatère est un parallélogramme.

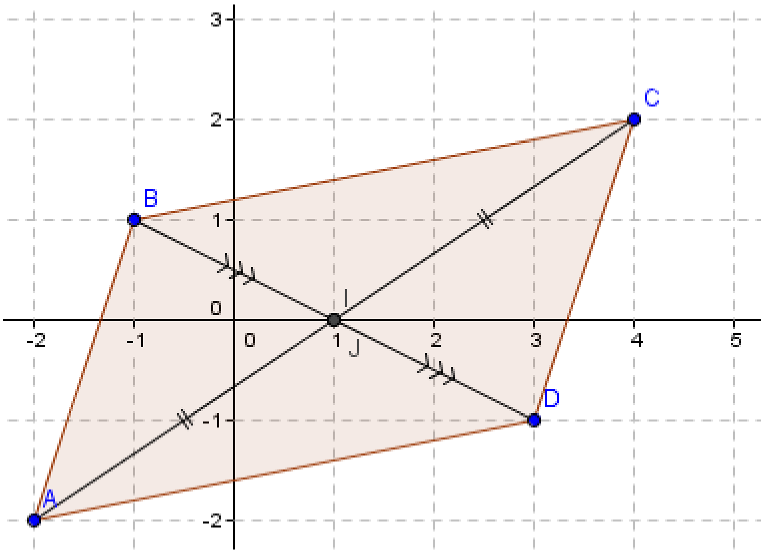
On calcul les coordonnées de I milieu de $[AC]$:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de $I(1\,;0)$. Ensuite on calcul les coordonnées de J milieu de $[BC]$:

$$\begin{cases} x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de J sont $J(1\,;0)$.



Donc les points I et J sont confondus, donc les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

II. Rappel des principaux théorèmes

a. Le théorème de Pythagore

Théorème : Le triangle ABC est rectangle en A **si et seulement si**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Remarque : Le théorème et sa réciproque forme une **équivalence**.

b. Les propriétés de Thales

Théorème et « réciproque » : Soit un triangle ABC. M un point de (AB) et N un point de (AC) distincts de A.

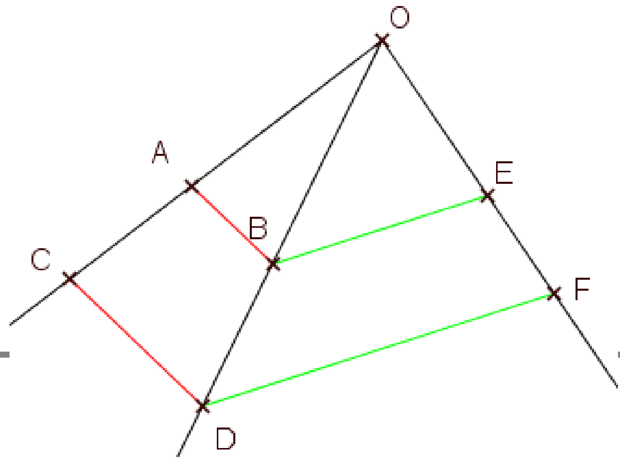
- Si (BC) et (MN) sont parallèles, alors AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors (BC) et (MN) sont parallèles.

Activité 3

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Et les droites (BE) et (DF) sont parallèles.
Montrer que les droites (AE) et (CF) sont parallèles.



III. Equation de droites

a. Définition avec coefficient directeur et ordonnée à l'origine

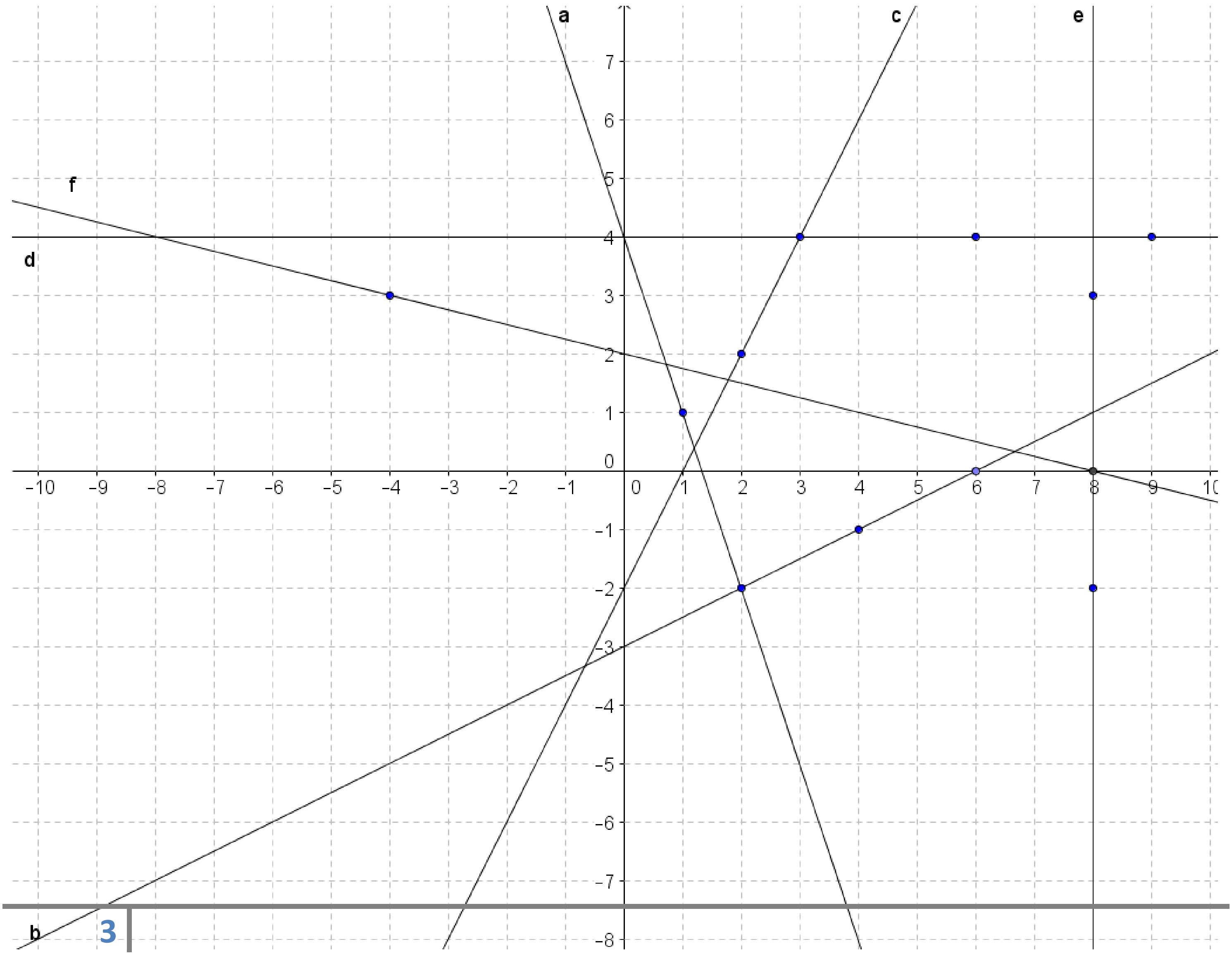
Propriété : Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Graphiquement :

- a est le coefficient directeur de la droite (d)
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$
pour tous points distincts A et B de (d).
- b est l'ordonnée à l'origine de (d)
La droite passe par le point $(0\,;b)$.

Activité 4

Déterminer graphiquement les équations des droites suivantes :



Propriété :

1. Une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$.
Un point appartient à la droite (d) si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation.

2. Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = k$ où k est un réel.

b. Droites parallèles ou sécantes

Propriété :

Deux droites d'équation respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$:
- Sont parallèles si et seulement si $a = a'$;
- sont sécantes si et seulement si $a \neq a'$.

Chercher les coordonnées du point d'intersection de 2 droites s&cantes c'est chercher le couple $(x\,;y)$ qui vérifie à la fois les équations des droites.

c. Alignement

Propriété :

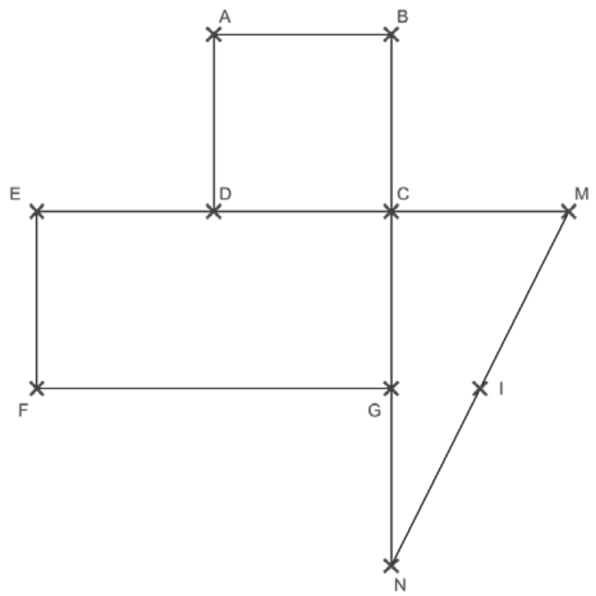
Trois points A, B et C d'abscisses distinctes sont alignés :
- si et seulement si les coordonnées de C vérifient une équation de (AB) ;
- si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Chercher les coordonnées du point d'intersection de 2 droites sécantes c'est chercher le couple.

Activité 5

Dans la figure ci-contre :

- ABCD est un carré ;
- ECGF est un rectangle ;
- Les points B, C, G, N sont alignés ;
- Les points E, D, C, M sont alignés ;
- $DC = DE = EF = CM = GN$.
- I est le milieu du segment $[MN]$



Les droites (AM) et (EI) sont-elles parallèles ?

On pourra se placer dans le repère (D, C, A).