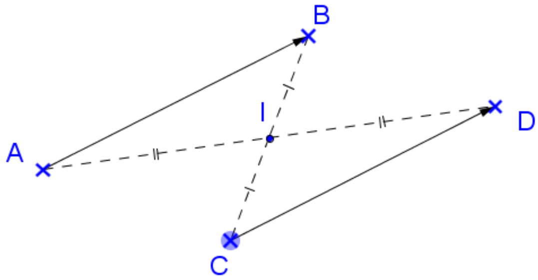
I. Vecteurs

a. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

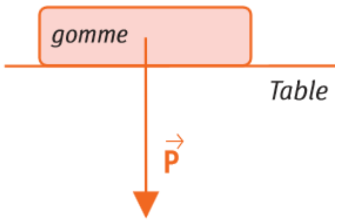


Définition : Soient A et B deux points du plan. À tout point C du plan on associe l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
On dit que D est l'image de C par la translation qui à A associe B.
D est l'unique point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

La translation qui à A associe B est appelé translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Un vecteur est défini de manière unique par une idée de déplacement :

$$\overrightarrow{AB} : \begin{cases} \text{La direction celle de la droite } (AB) \\ \text{Le sens : de A vers B} \\ \text{La longueur AB (norme du vecteur)} \|\overrightarrow{AB}\| \end{cases}$$

Exemples : En mécanique, les vecteurs sont des notions fondamentales qui permettent de modéliser des notions de forces, de mouvements, de vitesses et d'accélérations :

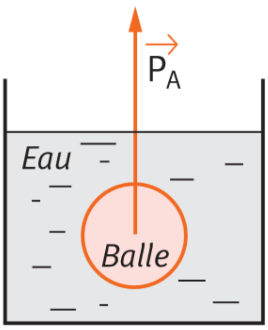


- Le vecteur $\vec{P}$ est la force du poids décrit par :

$$\vec{P} : \begin{cases} \text{de direction verticale} \\ \text{du haut vers le bas} \\ \text{de valeur } P = mg \end{cases} \qquad \text{où } g = 9{,}81\ N \cdot \mathrm{kg}^{-1}.$$

⚐ Calculer votre force $\vec{P}$ exprimer en N (Newton).

- Le vecteur $\overrightarrow{P_A}$ est la poussée d'Archimède sur corps immergé dans un fluide :

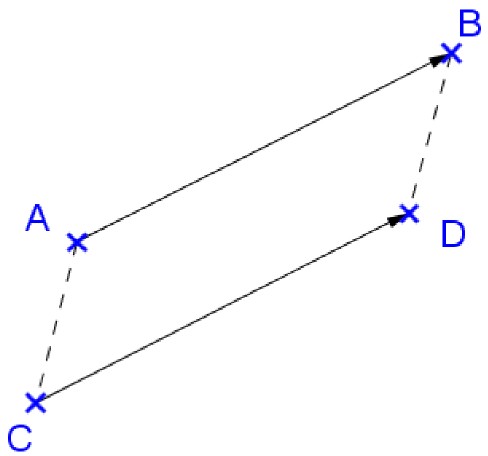


$$\overrightarrow{P_A} : \begin{cases} \text{de direction verticale} \\ \text{du bas vers le haut} \\ \text{de valeur } P_A = \rho\, V g \end{cases}$$

où ρ la masse volumique du fluide considéré ($\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$), V est le volume du corps immergé dans le fluide et g la constante gravitationnelle $g = 9{,}81\ N \cdot \mathrm{kg}^{-1}$

⚐ Calculer la poussée d'Archimède exercée sur une balle de ping-pong complètement immergé de diamètre $d = 40\ \mathrm{mm}$.

b. Egalité de vecteur

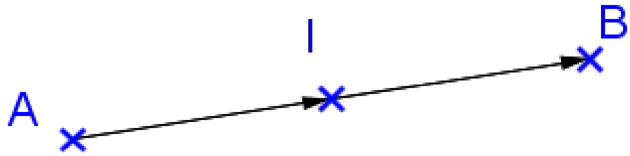


Définition : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété : (règle du parallélogramme) Soient A, B, C et D quatre points distinct du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $AB\boldsymbol{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Propriété : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

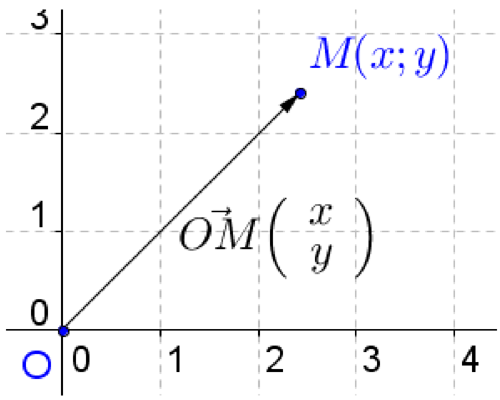


Définition : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul lorsque les points A et B sont confondus. On note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

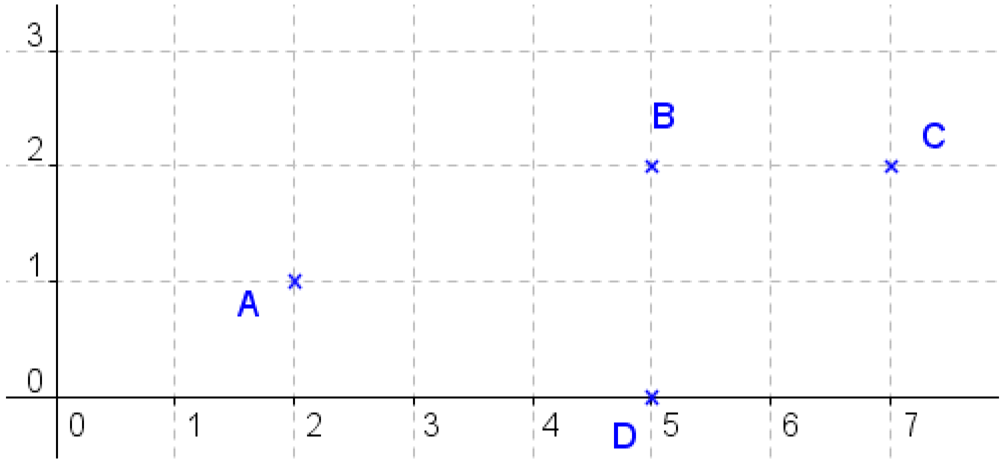
c. Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Définition : Dans un repère les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. :

si $M(x\,;y)$ on note $\binom{x}{y}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

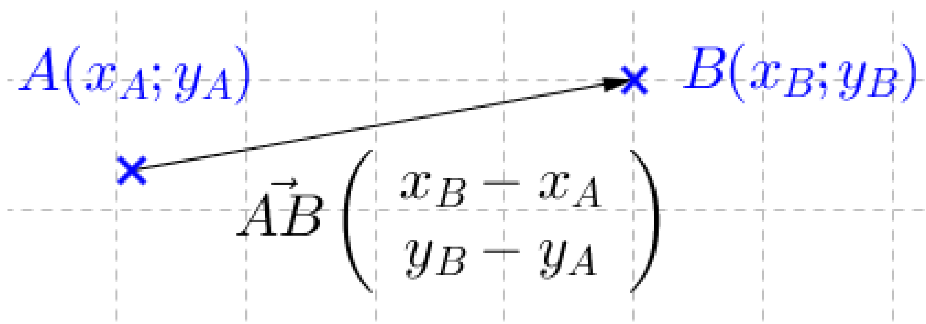


Activité : Reproduire la figure. Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{DB}$.



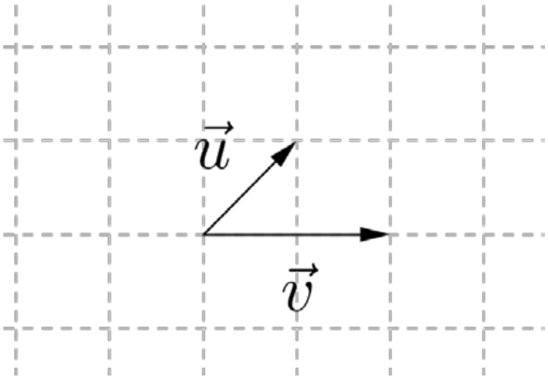
Propriété : Dans un repère, soient deux points A et B de coordonnées $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}.$$



Exercice : faire un algorithme qui pour deux points donnés renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

d. Somme de deux vecteurs

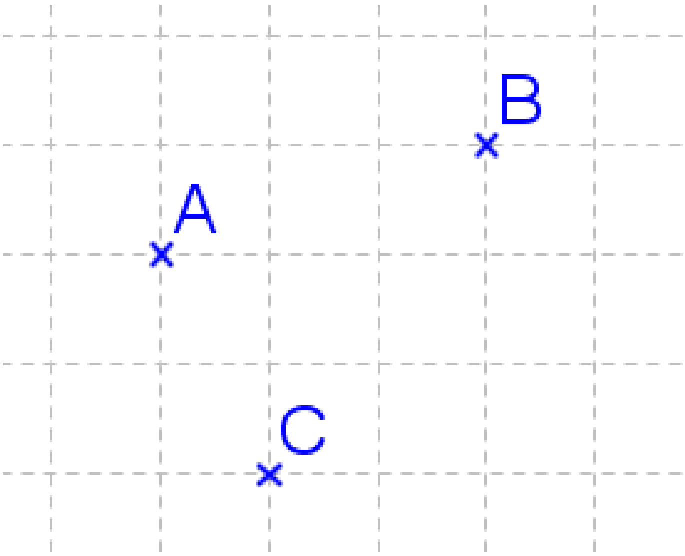


Activité :

1. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Reproduire la figure et tracer les vecteurs suivants :

1. $-\vec{u}$
2. $2\vec{v}$
3. $3\vec{u}-2\vec{v}$.



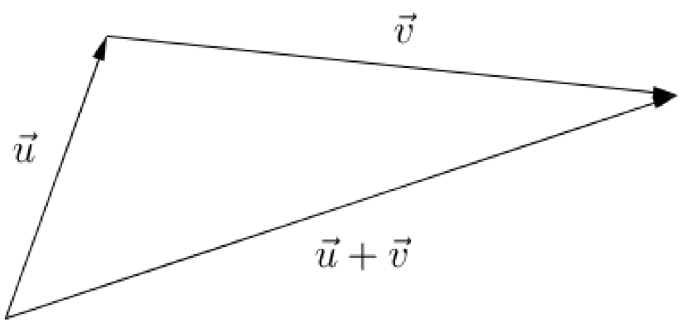
2. Soit trois points A, B et C. Reproduire la figure suivante et tracer le vecteur suivant :

$$2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}.$$

3. Sur un second graphique tracer le point M défini par :

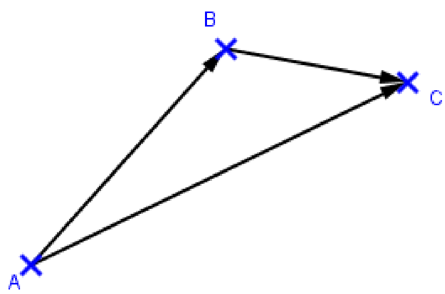
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.$$

Propriété définition: En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient une nouvelle translation de vecteur la somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et noté $\vec{u}+\vec{v}$.



Relation de Chasles : Pour tout points du plan A, B, C :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

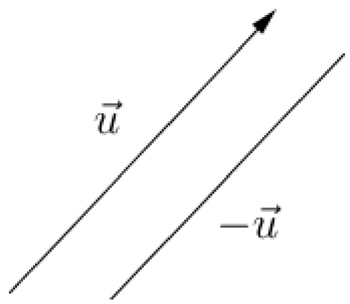
$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}.$$

Exercice : Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ dans chaque cas :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1-2\\3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}-1-2\\0-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}5+\frac{1}{2}\\3+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{2}+\frac{1}{2}\\\frac{9}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$

e. Opposé d'un vecteur, différence de deux vecteurs

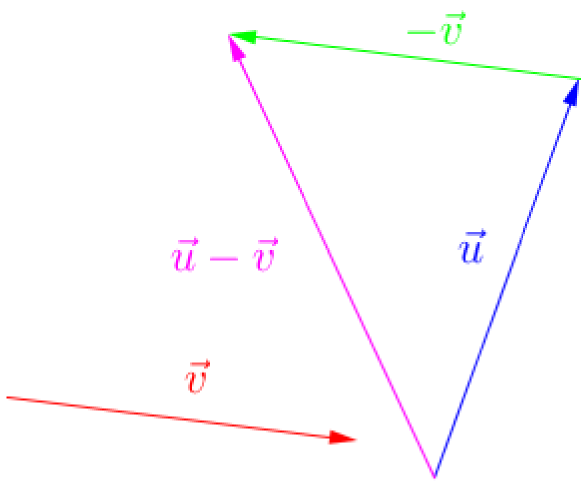
Définition : Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont mêmes direction, même norme et sont de sens contraire.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.



Définition : Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est définie par $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}.$$



Exercice : Soient trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-6\end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}7-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}7-(-2)\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}7-2-\frac{1}{2}\\2-1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.5\\-5\end{pmatrix}$.

f. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans un repère, le vecteur de notée $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\binom{kx}{ky}$ dans le même repère.

Remarques :
Le vecteur $k\vec{u}$ à la même direction que le vecteur $\vec{u}$.
Si $k > 0$, il a le même sens que le vecteur $\vec{u}$.
Si $k < 0$, il est de sens opposé au vecteur $\vec{u}$.
La longueur du vecteur $k\vec{u}$ est $|k| \times$ la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Exercice : soient les trois vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées $\vec{u}\binom{7}{2}, \vec{v}\binom{-3}{1}$ et $\vec{w}\binom{-2}{-5}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
2. $7\vec{v} + 2\vec{w}$
3. $2\vec{u} + 3\vec{v} - 7\vec{w}$

Propriété : Si k et k' sont deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors :

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$
$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$
$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}.$$

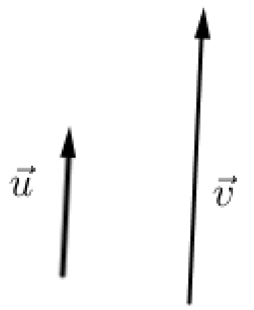
II. Colinéarité de deux Vecteurs

a. Définition et propriétés

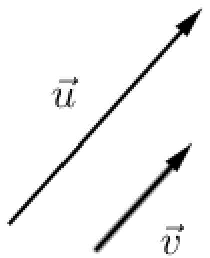
Définition : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

C'est-à-dire : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, ils sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

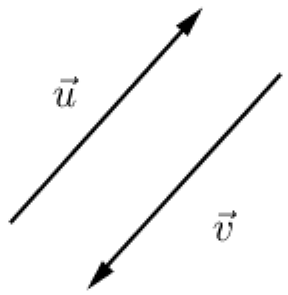
Exercice : Dans chaque cas déterminer k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$:



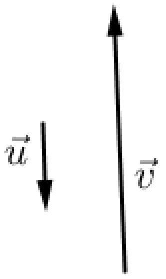
1. $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$



2. $\vec{u} = 2\vec{v}$



3. $\vec{u} = -\vec{v}$



4. $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$

Propriété : Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires :

1. Si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
2. Si et seulement si $xy' = x'y$.

x	x'
y	y'

Exercice : Faire un algorithme testant si deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice : Dans chaque cas dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

1. $\vec{u}\binom{2}{1}, \vec{v}\binom{-4}{-2}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$$2 \times (-2) = 1 \times (-4)$$
$$-4 = -4 \quad \text{Toujours vrai}$$

Autre explication : $-2\vec{u} = \vec{v}$.

2. $\vec{u}\binom{5}{-3}, \vec{v}\binom{-2.5}{1.5}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$$5 \times 1{,}5 = -3 \times (-2{,}5)$$
$$7{,}5 = 7{,}5 \quad \text{Toujours vrai}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

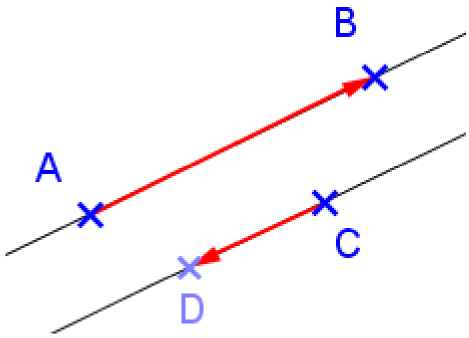
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$-1 \times 1 = 2 \times (-2)$

$-1 = -4$ FAUX

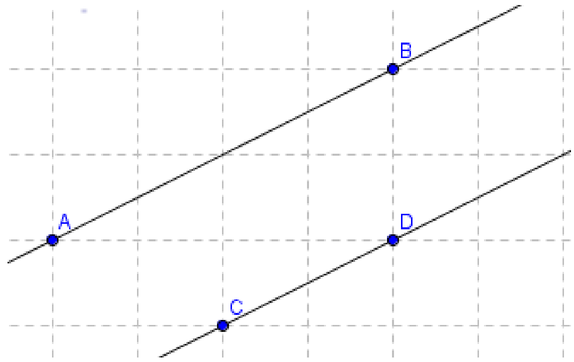
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



b. Application à la géométrie

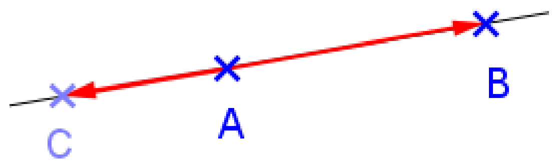
Propriété : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice : Les droites (AB) et (CD) sont-elle parallèles ?



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

Propriété : Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Remarque : on utilisera la propriété précédente sous la forme :

Propriété : Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice : Déterminer l'équation de la droite (AB) lorsque

1. $A(1;4)$ et $B(-1;2)$;
2. $A(-2;1)$ et $B(4;1)$;
3. $A(3;3)$ et $B(3;-3)$.