I. Extrémum d'une fonction

a. Intervalles réels

Définition : Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemples:

- Des segments :
  - L'intervalle $[1\,;4]$ est le segment des nombre réel compris entre 1 et 4 :
  $$x \in [1\,;4] \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \leq 4.$$
  - L'intervalle $]3\,;8[$ est le segment des nombre réel strictement compris entre 3 et 8 :
  $$x \in]3\,;8[\Leftrightarrow x > 3 \text{ et } x < 8.$$
- Des demi-droites :
  - L'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ est la demi-droite des nombres réels strictement plus grand que 1 :
  $$x \in]1\,;\,+\infty[\, \Leftrightarrow x > 1.$$
  - L'intervalle $]-\infty\,;\,-2]$ est la demi-droite des nombre réels plus petit que -2 :
  $$x \in]-\infty\,;\,-2] \Leftrightarrow x \leq -2.$$
- Avec une union :
  - L'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;7\right] \cup [10\,;\,11]$ est la réunion des segments correspondants :
  $$x \in \left[\frac{1}{2}\,;7\right] \cup [10\,;\,11] \Leftrightarrow\ x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \leq 7 \text{ ou } x \geq 10 \text{ et } x \leq 11.$$
  - L'intervalle $]-\infty\,;\,-1[\cup\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$ est la réunion des demi-droites correspondantes :
  $$x \in]-\infty\,;\,-1[\cup\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[\Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x \geq \sqrt{2}\,.$$

Notation : On notera I un tel intervalle.

b. Extrémum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction, on appelle extrémum d'une fonction sur un intervalle I un maximum ou un minimum sur cet intervalle.

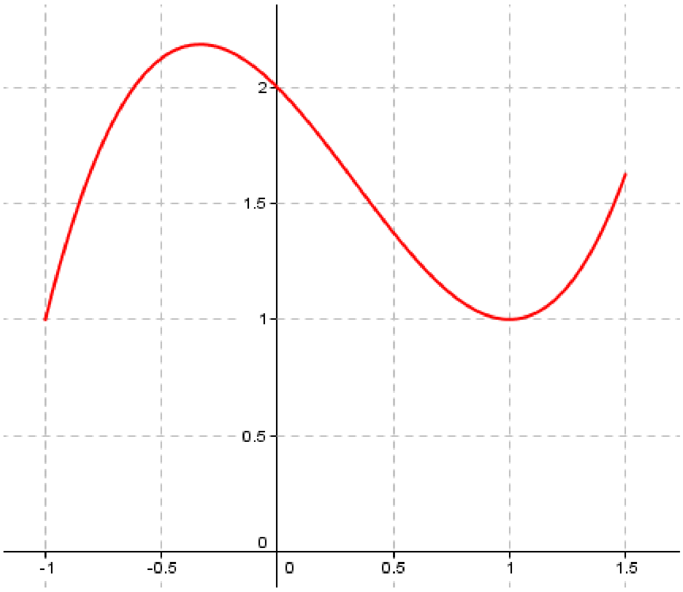
i. Maximum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction, on appelle maximum de la fonction f le réel M tel qu'il existe x_0 vérifiant $f(x_0) = M$ et pour tout $x \in I$
$$f(x) \leq M.$$

ii. Minimum d'une fonciton

Définition : Soit f une fonction, on appelle minimum de la fonction f le réel m tel qu'il existe x_0 vérifiant $f(x_0) = m$ et pour tout $x \in I$
$$f(x) \geq m.$$

Exemples : Déterminer les maximums et minimums de la fonction f définie sur $\left[-1\,;\frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$.



II. Fonction carré $x \mapsto x^2$

Définition : La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son carré x^2 est appelée fonction carré.

a. Sens de variation de la fonction carré

Propriété : La fonction $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$

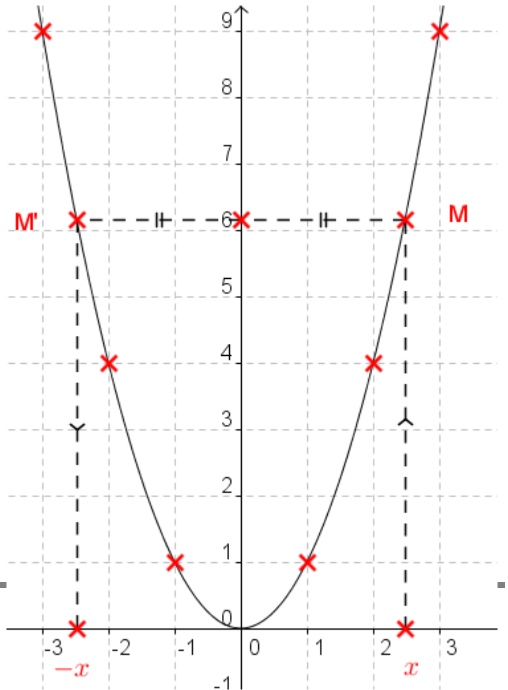
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Conséquences :

- Pour tous nombres réel positifs a et b : $a < b$ est équivalent à $a^2 < b^2$.
- Pour tous nombres réel négatif a et b : $a < b$ est équivalent à $a^2 > b^2$.

b. Représentation graphique de la fonction carré

Définition : Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique de la fonction carré est appelée parabole de sommet O.



Propriété : Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III. Fonctions polynômes de degré 2.

a. Définition et représentation graphique

Définition : On appelle fonction polynômes du second degré, ou trinôme, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres connus, et $a \neq 0$.
Il s'agit de la forme développé de $f(x)$.

Exemples :
$f(x) = -6x^2 + 2x$ $(a = -6, b = 2$ et $c = 0)$
$g(x) = 2(x+1)(x-2)$ est un trinôme du second degré, car si l'on développe cette expression on obtient : $g(x) = 2(x+1)(x-2) = 2[x^2 - 2x + x - 2] = 2x^2 - 2x - 4$ $(a = 2, b = 2$ et $c = -2)$

Propriété : Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole de sommet S.

b. Variations des fonctions polynômes de degré 2

Théorème : Les fonctions polynômes du second degré varie selon le signe de a, on a 2 cas :
- Si $a > 0$: la fonction est décroissante puis ensuite croissante , le tableau de variation est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	$+\infty$

- Si $a < 0$: la fonction est croissante, puis décroissante le tableau de variation devient :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	$-\infty$

c. Sommet et extrémum

Une conséquence immédiate du théorème précédent :

Le sommet S de la parabole a pour coordonnées : $S\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

- Si $a > 0$, la fonction polynôme admet un minimum : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, la fonction polynôme admet un maximum : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

d. Forme canonique

Théorème : Pour toute fonction polynôme f d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$,
on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Alors la forme canonique de la fonction f est :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 7$$

Déterminer la forme canonique de la fonction f…

IV. Equations et inéquations.

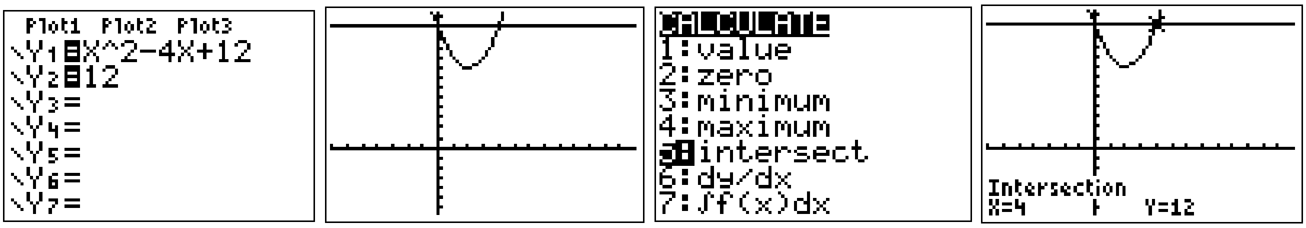
a. Equations et fonction $f(x) = k$

☞ **Méthodes** : Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à chercher les antécédents de k par la fonction f.

- Graphiquement : On trace la fonction f et la droite d'équation $y = k$, et on cherche les points d'intersections entre la représentation de la fonction f et celle de la droite d'équation $y = k$.
- Algébriquement : on cherche la (ou les) valeurs(s) de x pour lesquels $f(x) = k$.

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 12$.
On veut résoudre $f(x) = 12$.

- Graphiquement : On trace la fonction f et la droite d'équation $y = 12$:



On conjecture ainsi que les solutions de cette équation sont : $x = 0$ ou $x = 4$.

- Algébriquement : l'équation $f(x) = 12$ est équivalente à :

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 12 = 12 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{0\,;4\}$.

b. Inéquations $f(x) \leq k$ ou $f(x) \geq k$

☞ **Méthode** : Résoudre l'équation $f(x) \geq k$ revient à chercher les antécédents pour lesquels les images de la fonctions sont plus grandes que k par la fonction f.

- Graphiquement : On trace la fonction f et la droite d'équation $y = k$, et on cherche les valeurs de x pour lesquels la courbe est **au-dessus** de la droite.
- Algébriquement : on écrit l'inéquation comme $f(x) - k \geq 0$, on simplifie est factorise au maximum de façon à se ramener à un produit de terme du premier degré, puis on étudie le signe de chacun des facteurs pour en déduire le signe de l'expression.

Sur le même exemple :

- Graphiquement : Les valeurs de x pour lesquels la courbe est au-dessus de la droite sont les x vérifiant $x \leq 0$ ou $x \geq 4$.
- Algébriquement : l'inéquation $f(x) \geq 12$ est équivalente à :

$$x(x-4) \geq 0.$$

A ce moment on fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette inéquation est : $\mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [4\,;\ +\infty[$.