I. Propriétés de géométrie analytique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$,

a. Distance entre deux points.

Activité 1

Dans un repère orthonormée $(O\,;I\,;J)$ on considère deux point $A(2\,;1)$ et $B(5\,;3)$.

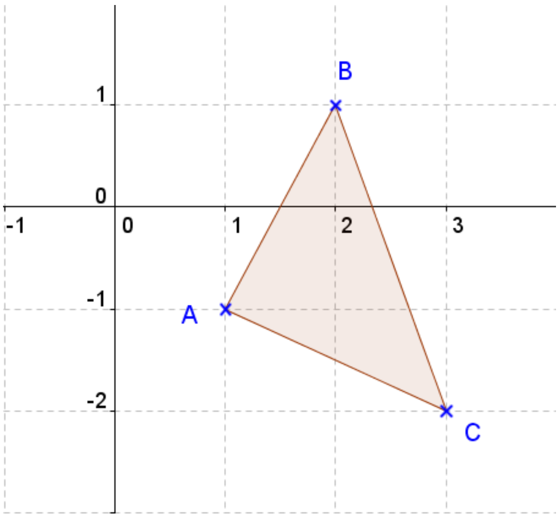
1. Placer un point C de coordonnées entière (c'est-à-dire sur le quadrillage) de sorte que le triangle ABC soit rectangle en C.
2. Déterminer la longueur AC, puis la longueur BC.
3. A l'aide du repère écrire ces longueurs en fonction des coordonnées des points de départ (x_A, y_A, x_B et y_B).
4. Calculer la longueur du segment AB.
5. En utilisant les questions 3 et 4 trouver une formule pour calculer la longueur d'un segment dans le cas général.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. La longueur du segment $[AB]$ est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Activité 2

Dans un repère orthonormée $(O\,;I\,;J)$ on considère trois points $A(1\,;\,-1)$, $B(2\,;1)$ et $C(3\,;\,-2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?



Après avoir fait le graphique, on conjecture que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Pour la démonstration, nous calculons le carré des longueurs AB, AC et BC :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (2-1)^2 + \left(1-(-1)\right)^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient $AC^2 = 5$, ce qui prouve que le triangle ABC est isocèle en A.
Et $BC^2 = 10$, ce qui prouve par le théorème de Pythagore ($BC^2 = AB^2 + AC^2$) qu'il est rectangle A.
Donc la conjecture est bien démontré, le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

b. Milieu de deux points (✇).

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. Les coordonnées de $I(x_I\,;y_I)$ milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

Activité 2

Soient quatre points : $A(-2\,;\,-2), B(-1\,;1), C(4\,;2)$ et $D(3\,;\,-1)$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On conjecture que ce quadrilatère est un parallélogramme.

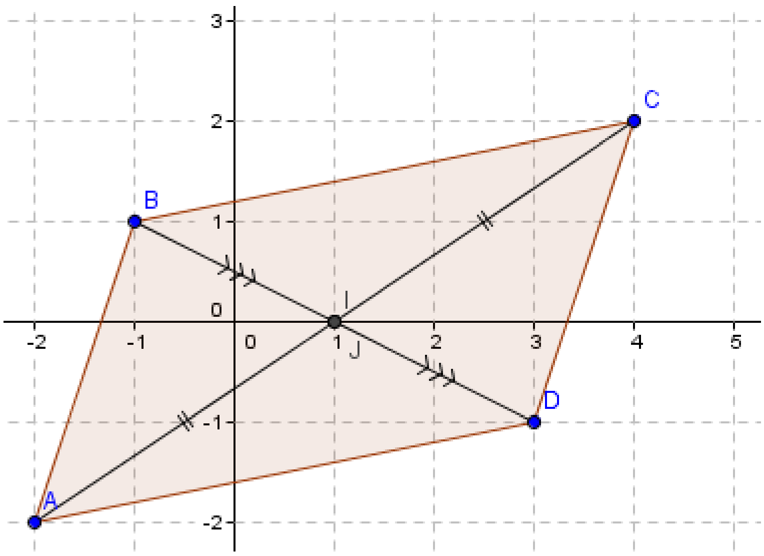
On calcul les coordonnées de I milieu de $[AC]$:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de $I(1\,;0)$. Ensuite on calcul les coordonnées de J milieu de $[BC]$:

$$\begin{cases} x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de J sont $J(1\,;0)$.



Donc les points I et J sont confondus, donc les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

II. Rappel des principaux théorèmes

a. Le théorème de Pythagore

Théorème : Le triangle ABC est rectangle en A **si et seulement si**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Remarque : Le théorème et sa réciproque forme une **équivalence**.

b. Les propriétés de Thales

Théorème et « réciproque » : Soit un triangle ABC. M un point de (AB) et N un point de (AC) distincts de A.

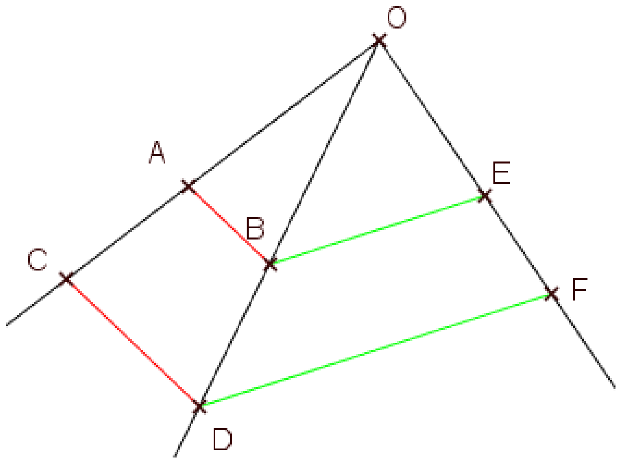
- Si (BC) et (MN) sont parallèles, alors AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

- Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors (BC) et (MN) sont parallèles.

Activité 3

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Et les droites (BE) et (DF) sont parallèles.
Montrer que les droites (AE) et (CF) sont parallèles.



III. Equation de droites (connaissant 2 points)

a. Définition avec coefficient directeur et ordonnée à l'origine

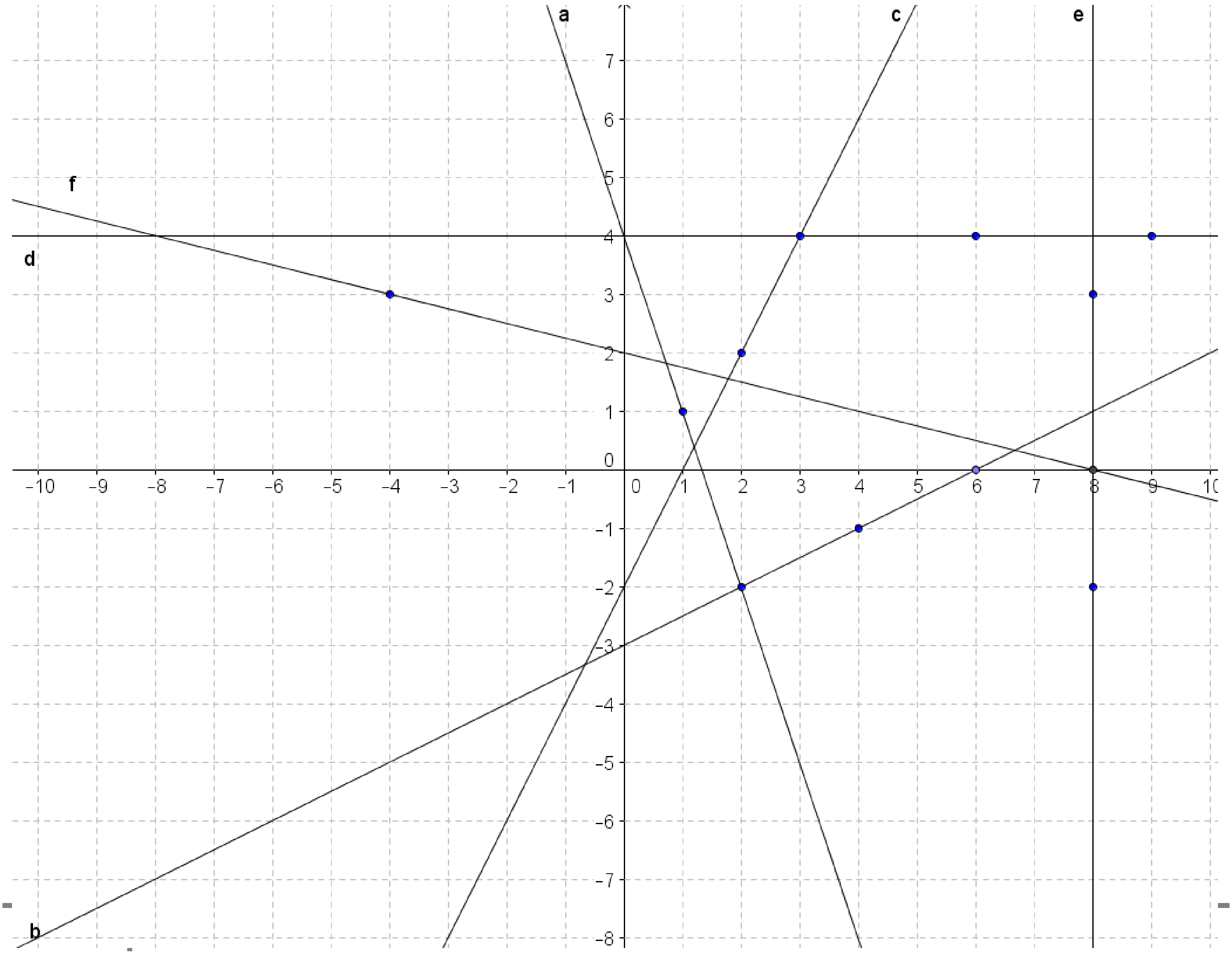
Propriété : Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Graphiquement :

- a est le coefficient directeur de la droite (d)
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$
pour tous points distincts A et B de (d).
- b est l'ordonnée à l'origine de (d)
La droite passe par le point $(0\,;b)$.

Activité 4

Déterminer graphiquement les équations des droites suivantes :



Propriété :

1. Une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$.
Un point appartient à la droite (d) si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation.

2. Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = k$ où k est un réel.

b. Droites parallèles ou sécantes

Propriété :

Deux droites d'équation respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$:
- Sont parallèles si et seulement si $a = a'$;
- sont sécantes si et seulement si $a \neq a'$.

Chercher les coordonnées du point d'intersection de 2 droites sécantes c'est chercher le couple $(x\,;y)$ qui vérifie à la fois les équations des droites.

c. Alignement

Propriété :

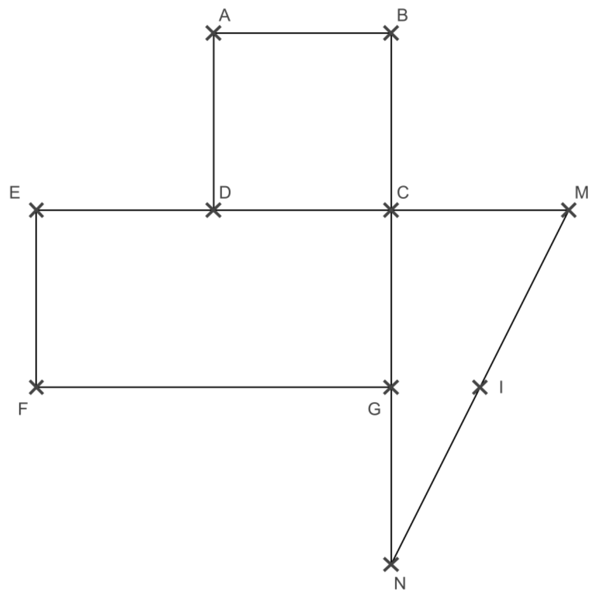
Trois points A, B et C d'abscisses distinctes sont alignés :
- si et seulement si les coordonnées de C vérifient une équation de (AB) ;
- si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Chercher les coordonnées du point d'intersection de 2 droites sécantes c'est chercher le couple.

Activité 5

Dans la figure ci-contre :

- ABCD est un carré ;
- ECGF est un rectangle ;
- Les points B, C, G, N sont alignés ;
- Les points E, D, C, M sont alignés ;
- $DC = DE = EF = CM = GN$.
- I est le milieu du segment $[MN]$



Les droites (AM) et (EI) sont-elles parallèles ?

On pourra se placer dans le repère (D, C, A).