

# Correction du Baccalauréat STI2D Examen Blanc 11 décembre 2012

## EXERCICE 1

3 points

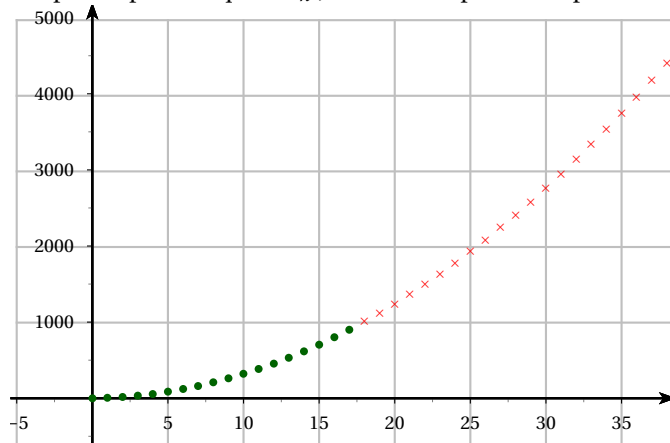
Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = 3n^2 + 2n$ .

1. On conjecture que la limite de la suite  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  est  $+\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. a. À l'aide d'un algorithme on trouve  $N = 18$ . On peut vérifier que  $u_{17} = 901$  et  $u_{18} = 1008$ .

- b. Les points pour lesquels  $u_n \geq 10^3$  sont représentés par des croix :



3. Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 3x^2 + 2x.$$

- a.  $f'(x) = 6x + 2$ .

Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est positive. On déduit que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

- b. On remarque tout d'abord que  $f(n) = 3n^2 + 2n = u_n$ .

D'après la question 3.a., la fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ , donc la suite  $(u_n)$  est également croissante. Et on déduit que pour tout entier naturel  $n \geq 18$  on a  $u_n \geq 10^3$ .

## Exercice 2

3 points

Pour tout entier naturel  $n$  on définit la suite  $v_n$  par :

$$v_n = \frac{2}{n^2 + 3}$$

1.

$n$	0	10	50	100	150
$v_n$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{103}$	0,000799	0,0001999	$8,9 \cdot 10^{-5}$
$n$	200	250	300	350	450
$v_n$	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$

2. a. Soit  $n$  un entier naturel,  $n^2 \geq 0$  donc  $n^2 + 3 \geq 3$ , c'est-à-dire à plus forte raison  $n^2 + 3 \geq 0$ . Donc on déduit  $\frac{2}{n^2+3} \geq 0$ .  
Donc pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_n \geq 0$
- b. Soit  $n$  un entier naturel, en utilisant la question précédente on peut écrire que :  
 $|v_n| \leq 10^{-4}$  est équivalent à  $v_n \leq 10^{-4}$ . Résolvons

$$\begin{aligned}
 v_n &\leq 10^{-4} \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{n^2+3} &\leq 10^{-4} \\
 \Leftrightarrow \frac{n^2+3}{2} &\geq \frac{1}{10^{-4}}
 \end{aligned}$$

Car  $\frac{2}{n^2+3}$  est positif d'après la question 1..

$$\begin{aligned}
 v_n \leq 10^{-4} &\Leftrightarrow n^2 + 3 \geq 2 \cdot 10^4 \\
 \Leftrightarrow n^2 &\geq 2 \cdot 10^4 - 3 \\
 \Leftrightarrow n &\geq \sqrt{2 \cdot 10^4 - 3} \\
 \Leftrightarrow n &\geq 141,41
 \end{aligned}$$

Donc on déduit que l'entier  $N$  à partir duquel  $v_N \leq 10^{-4}$  est  $N = 142$ .

On vérifie que :

$$\begin{aligned}
 v_{141} &= \frac{2}{141^2+3} \simeq 1,0058 \cdot 10^{-4} \\
 \text{et } v_{142} &= \frac{2}{142^2+3} \simeq 9,9 \cdot 10^{-5}.
 \end{aligned}$$

### Exercice 3

2 points

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 2x - x \ln x$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 - \ln(3x)$ .

1.  $f(3e) = 2 \times 3e - 3e \ln(3e) = 6e - 3e(\ln 3 + \ln e) = 6e - 3e(\ln 3 + 1) = 6e - 3e \ln 3 - 3e = 3e - 3e \ln 3$ .  
Réponse **b**.

2. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  Résolvons l'équation  $f(x) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x - x \ln x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(2 - \ln x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 - \ln x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 &= \ln x \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(e^2) &= \ln x \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^2 &= x
 \end{aligned}$$

Or  $0 \notin ]0 ; +\infty[$ , donc l'ensemble des solutions de l'équation est  $S = \{e^2\}$  réponse **b**.

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x) = +\infty.$$

Donc on déduit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(3x) = -\infty$ , et par somme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(3x)) = -\infty$ .

Réponse c.

4. Une primitive de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = 3x - x \ln(3x)$  : en effet

$$F'(x) = 3 - \left( \ln(3x) + x \frac{3}{3x} \right) = 3 - (\ln(3x) + 1) = 2 - \ln(3x)$$

Réponse b..

**EXERCICE 4****4 points****Partie A**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0,5 ; 25]$  par :  $f(x) = 8,68 \times \ln x + 93,28$ .

1. a. La fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$  est :

$$f'(x) = \frac{8,68}{x}.$$

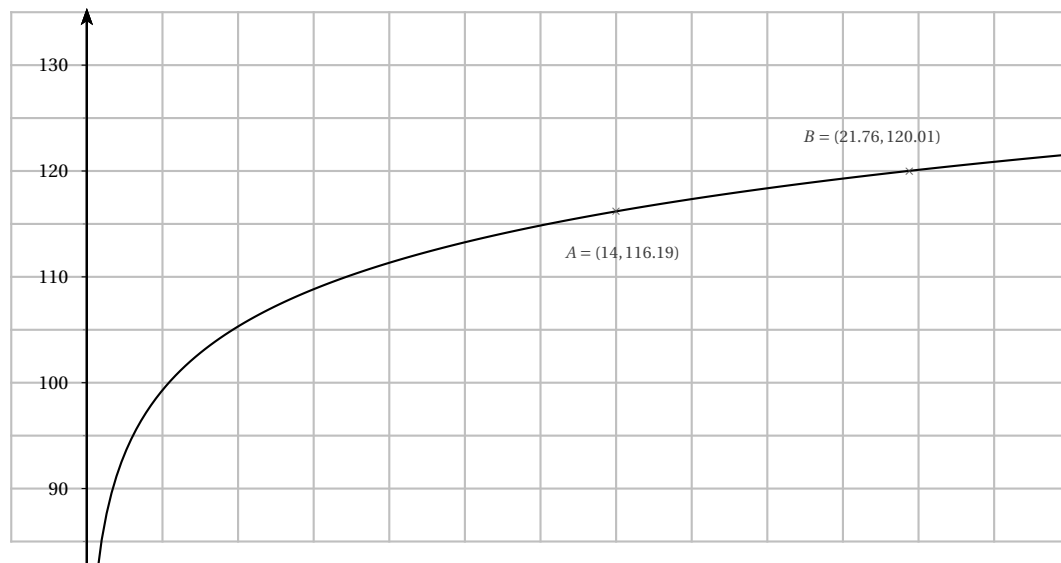
b. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0,5 ; 25]$  la fonction dérivée  $f'$  est positive.

c. On déduit le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$  :

$x$	0.5	25
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(0.5)$	$f(25)$

2.

$x$	0,5	1	2	5	10	16	25
$f(x)$	87	93	99	107	113	117	121



3.

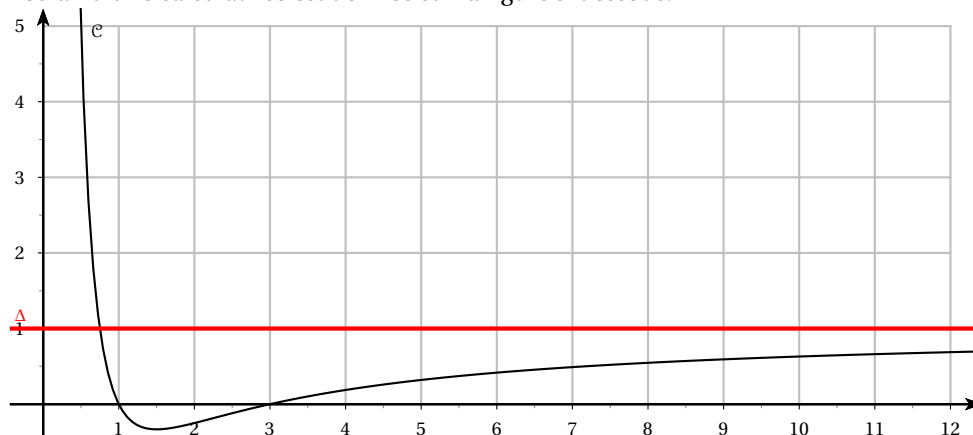
## Partie B

1. a. Le point  $A$  représente la réponse 3 du logiciel et à partir du point  $B$  la réponse 4.  
b. Pour un volume sonore supérieur à 120 décibels la pression supportée est supérieure à  $e^{3,08} \simeq 21,76$  bars.
2. D'après la question précédente, la pression que l'oreille de la personne subit si elle est soumise à une intensité sonore de 120 décibels est d'environ 21,76 bar.

## Exercice 5

4 points

La fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$ , dont la représentation graphique  $\mathcal{C}$  obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure ci-dessous.



1. Graphiquement, on détermine  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ .
2. Graphiquement on peut donner un tableau de signe de  $g(x)$  quand  $x$  varie dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ :

$x$	0	1	3	$+\infty$		
$g(x)$		+	0	-	0	+

3. On admet que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2},$$

où  $a, b, c$  sont trois constantes réels.

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} = a.$$

D'après la question 1. on déduit la valeur de  $a = 1$ .

- b. Graphiquement on lit  $g(1) = 0$  et  $g(3) = 0$ .

Dans la suite de l'exercice on admet que la fonction  $g$  est de la forme

$$g(x) = \frac{x^2 + bx + c}{x^2}.$$

c.

$$g(1) = \frac{1^2 + b \times 1 + c}{1^2} = 1 + b + c \text{ et } g(3) = \frac{3^2 + b \times 3 + c}{3^2} = \frac{9 + 3b + c}{9}$$

On déduit de la question 3.b. le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$(S) \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ \frac{9 + 3b + c}{9} = 0 \end{cases}$$

d. On résout le système en soustrayant la première ligne à la seconde on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 9 + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 8 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b - 1 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

Donc au final, on conclut que :

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

**Exercice 6****4 points**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 + \sin(2x)$ .

1. Une primitive  $F$  de la fonction  $f$  est donnée par :

$$F(x) = x - \frac{1}{2} \cos(2x).$$

2.

$$V_m = \frac{1}{\pi} (F(\pi) - F(0)) = \frac{1}{\pi} \left( \pi - \frac{1}{2} \cos(2\pi) - \left( 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right) \right) = \frac{1}{\pi} \left( \pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

$V_m$  est appelée la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[0 ; \pi]$

3. a. D'après la formule  $\sin^2(X) = \frac{1 - \cos(2X)}{2}$ , on déduit que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}.$$

$$\text{b. } (f(x))^2 = (1 + \sin(2x))^2 = 1 + 2\sin(2x) + (\sin(2x))^2 = 1 + 2\sin(2x) + \frac{1 - \cos(4x)}{2}$$

$$\text{Donc on obtient : } (f(x))^2 = \frac{3}{2} + 2\sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(4x)$$

c. Une primitive  $G$  de  $(f(x))^2$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par :

$$G(x) = \frac{3}{2}x + \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(4x)}{4} = \frac{3}{2}x + \cos(2x) + \frac{1}{8} \sin(4x).$$

d.

$$A = \frac{1}{\pi} (G(\pi) - G(0))$$

$$A = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3}{2}\pi + \cos(2\pi) + \frac{1}{8} \sin(4\pi) - \left( \frac{3}{2} \times 0 + \cos 0 + \frac{1}{8} \sin 0 \right) \right)$$

$$A = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3}{2}\pi + 1 - 1 \right)$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$A$  est la valeur efficace de la fonction  $f$  sur  $[0 ; \pi]$ .

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$