1. Limites d’une fonction à l’infini
   1. **Limites infinies**

**Activité 1**

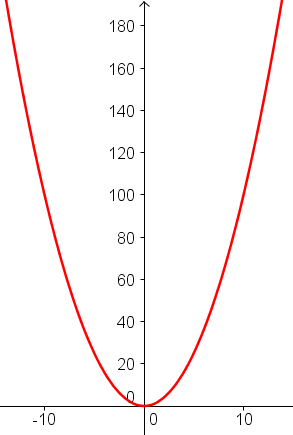
On considère la fonction définie sur par : , et dont la courbe représentative dans le repère est donnée ci-contre.

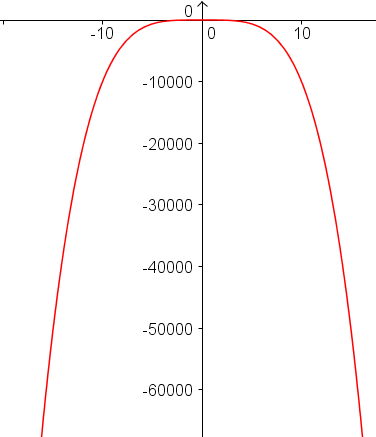
* + - 1. Calculer et .
      2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : «  est aussi proche que l’on veut de …, dès que est assez grand (voisin de ). »

**Définition** : Soit une fonction définie sur un intervalle de la forme avec un réel.  
On dit que la limites de en est égale à , et l’on écrit :   
 lorsque est aussi grand que l’on veut (voisin de ), dès que est assez grand (voisin de ).

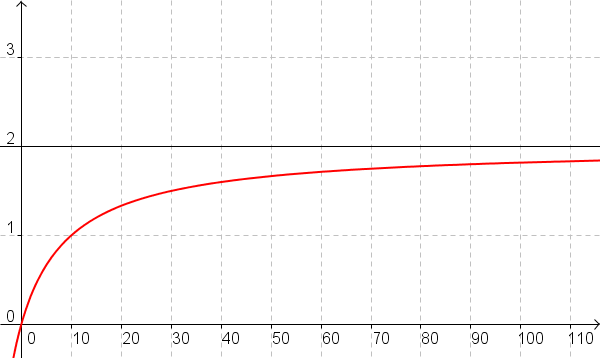
**Définition** : Soit une fonction définie sur un intervalle de la forme avec un réel.  
On dit que la limites de en est égale à , et l’on écrit :

lorsque est aussi petit que l’on veut (voisin de ), dès que est assez grand (voisin de ).

Exemples :   
Limites de la fonction carrée en et en .  
  
Soit la fonction définie sur par .



Soit la fonction définiesur par

* 1. **Limites finies**

**Activité 2**

On considère la fonction définie sur par :

et dont la courbe représentative dans le repère est donnée ci-contre.

1. Calculer et .
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : «  est aussi proche que l’on veut de …, dès que est assez grand (voisin de ). »

**Définition** : Soit une fonction définie sur un intervalle et un nombre réel.

1) Si , et si, la distance entre et est aussi proche de zéro que l’on veut, dès que est assez grand (voisin de ) alors on dit que la limite de en est égale à et l’on note :   
2) Si , et si, la distance entre et est aussi proche de zéro que l’on veut, dès que est assez petit (voisin de ) alors on que la limite de en est égale à et l’on note :

Exemple :   
Limite en et de la fonction inverse :



* 1. **Limite finie et Asymptotes horizontales**

**Définition** *(interprétation graphique)* : Soient une fonction définie sur un intervalle de la forme (respectivement ) avec un réel et sa courbe représentative.

Lorsque la fonction admet pour limite en (r. en ) un réel  ; c’est-à-dire:

On dit que la droite d’équation est asymptote horizontale à au voisinage de (r. ).

Exemple : La droite d’équation est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en et . Et la droite est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction de l’activité 2 en .

1. Limite d’une fonction en
   1. **Limites infinies**

**Activité 3**

On considère la fonction définie sur par :

et dont la courbe représentative dans le repère est donnée ci-contre.

1. Calculer et .
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : «  est aussi proche que l’on veut de …, dès que approche 1 par la droite. »
3. Calculer et .
4. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : «  est aussi proche que l’on veut de …, dès que approche 1 par la gauche. »

**Définition** : Soit une fonction définie sur un intervalle de la forme (ou ) avec un réel.  
On dit que la limites de en est égale à , et l’on écrit :   
 lorsque est aussi grand ou petit que l’on veut (voisin de ), dès que est suffisamment près de (voisin de ).



**Exemple :** Limites de le fonction inverse en 0 :   
Remarque :  
On distingueras la limite à droite de 0 c’est-à-dire lorsque (noté )  
avec la limite à gauche de 0 : (noté ).

* 1. **Limites infinies et asymptotes verticales**

**Définition** *(interprétation graphique)*: Soient une fonction définie sur un intervalle de la forme (ou ) avec un réel et la courbe représentative de la fonction .  
Lorsque la limites de en est égale à  :   
on dit que la droite d’équation est asymptote verticale à .

Exemple : La droite d’équation est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse en et .

Et la droite est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction de l’activité 3 en .

* 1. **Limites en un point du domaine de définition**

**Théorème** : Soit une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle et un réel appartenant à . On a alors

Remarque : Ce théorème nous permet de dire qu’en tout point de l’intervalle la fonction est continue.

1. Calcul de limites
   1. **Limites de références**
      1. Fonction , avec n entier naturel

**Théorème** : Pour tout entier naturel non nul on a :  
Si est pair :   
Si est impair :

* + 1. Fonction

**Théorème** :

* + 1. Limite de la fonction inverse

**Théorème** :

* 1. **Opérations sur les limites**
     1. Produit d’une fonction par une constante

**Théorème** : Soit une fonction définie sur un intervalle de et un réel non nul.  
 - Si tend vers , alors tend vers .  
 - Si tend vers , alors tend vers si est positif et si est négatif.  
 - Si tend ves , alors tend vers si est positif et si est négatif.

Ces résultats sont valables, pour un limite quand tend vers appartenant à l’intervalle , ou une borne de , ou quand tend vers

* + 1. Somme de deux fonctions

**Théorème** : Soit et deux fonctions définies sur un intervalle de , et et deux réels.  
 - Si tend vers et vers alors tend vers .  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers .  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers .  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers .  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers .

Remarque : Si tend vers et tend vers, alors on ne peut conclure sur la limite de c’est une forme indéterminée.

* + 1. Produit de deux fonctions

**Théorème** : Soit et deux fonctions définies sur un inervalle de , et et deux réels.  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers .  
 - Si tend vers (avec ) et tend vers, alors tend vers selon le signe de .  
 - Si tend vers et tend vers, alors tend vers selon la règle du produit.

Remarque : Si tend vers et tend vers, alors on ne peut conclure sur la limite de c’est une forme indéterminée.

* + 1. Puissance d’une fonction

**Théorème** : Soit une fonction définie sur un intervalle de , un entier naturel non nul et un réel.  
 - Si tend vers , alors tend vers .  
 - Si tend vers , alros tend vers   
 - Si tend vers et est pair, alors tend vers   
 - Si tend vers et est impair, alors tend vers

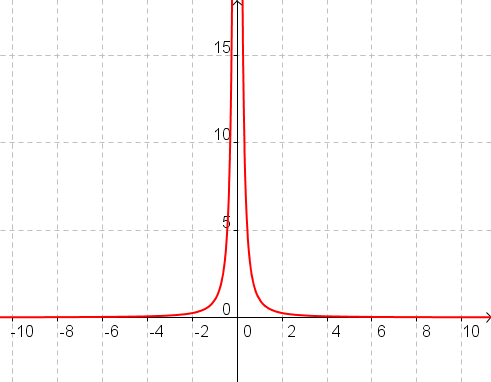
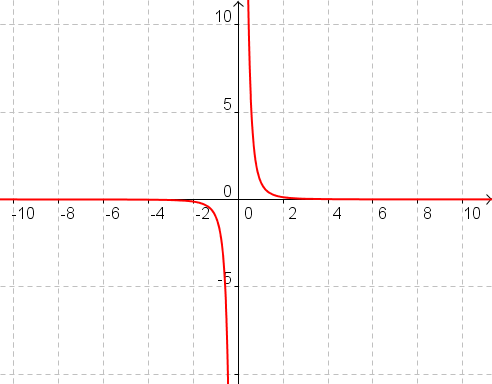
* + 1. Inverse d’une fonction

**Théorème** : Soit une fonction définie sur un intervalle de telle que ne s’annule pas sur .  
 - Si tend vers , alors tend vers .  
 - Si tend vers un réel non nul, alors tend vers   
 - Si tend vers et est strictement positif sur , alors tend vers .  
 - Si tend vers et strictement négatif sur , alors tend vers

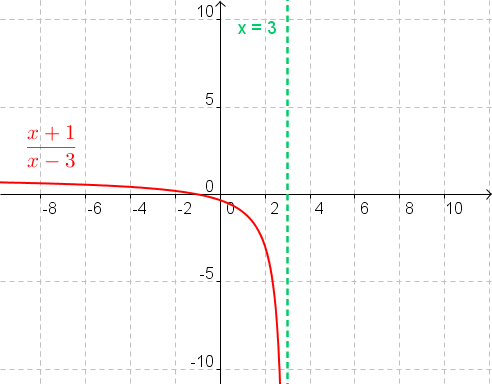
Exemple: Limite en de la fonction  :   
La fonction est définie est positive sur , sa limite en est .  
On déduit du théorème précédent :

* + 1. Limites des fonctions , avec n entier naturel

**Théorème** :   
Limites en et en  :   
L’axe des abscisses est asymptote à la courbe en et en .  
Limites en :  
 - Si est pair :   
 - Si est impair :   
L’axe des ordonnées est asymptote à la courbe en .

Exemples : Représentation des fonctions et  :   
  

* + 1. Quotient de deux fonctions

**Théorème** : Soient et deux fonctions définies sur un intervalle de telles que ne s’annule pas sur .  
 - Si tend vers un réel et vers un réel non nul, alors tend vers .  
 - Si tend vers un réel et vers l’infini ( ou ), alors tend vers .  
 - Si tend vers un réel non nul est tend vers , alors tend vers ou .  
 Selon le signe de et de

Exemple : Soit la fonction définie sur par .  
On cherche la limite de quand tend vers . On a :   
Donc la fonction tend vers qui est strictement positif et la fonction est négative sur , donc d’après le théorème précédents :   
Donc la droite d’équation est asymptote verticale à la courbe représentative de .

1. Résumer
   1. **Limites et asymptotes**
   2. **Limites de références**

est un entier naturel non nul

* 1. **Opérations sur les limites**

tend vers un nombre réel, vers ou vers , et sont deux nombres réels

* + 1. Somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| tend vers |  | | |  |  |  |
| tend vers |  |  |  |  |  |  |
| tend vers |  |  |  |  |  | Forme indéterminée |

* + 1. Produit

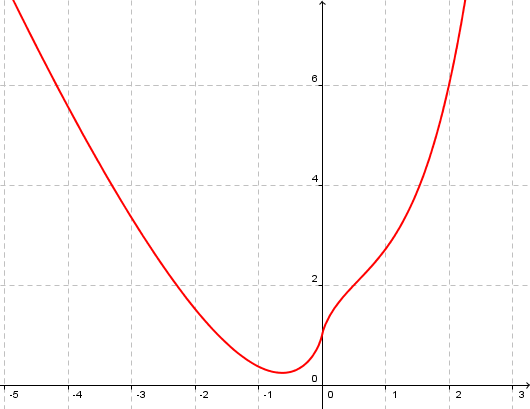
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| tend vers |  |  |  |  |
| tend vers |  |  |  | 0 |
| tend vers |  | suivant les règles du signe | | Forme indéterminée |

* + 1. Quotient

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| tend vers |  | | ou | 0 |  |
| tend vers |  |  |  | 0 |  |
| tend vers |  | 0 | suivant les règles du signe | Forme indéterminée | |

1. Exercices
2. Limites d’une fonction à l’infini
   1. **Limites infinies**

Exercice 1

  
Conjecturer les limites en et de la fonction représenter graphiquement ci-dessus.

Exercice 2

Soit la fonction définie sur par .

1. Calculer la fonction dérivée de et établir le tableau de variation de .  
 2. a. Sur la calculatrice, faire un tableau de valeurs de à partir avec un pas de 10.  
 b. En déduire un réel à partir duquel .  
 c. En modifiant le pas du tableau, déterminer un réel à partir duquel   
 d. Enoncer une conjecture sur la limite de quand tend vers .  
 3. a. Soit un entier naturel. Résoudre l’équation   
 Justifier qu’il existe une valeur de (que l’on exprimera en fonction de ) à partir de  
 laquelle .  
 b. Que peut-on en déduire sur la limite de en .

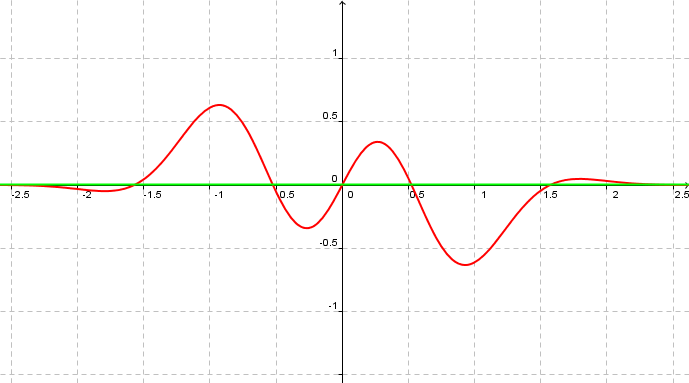
Exercice 3

Soit la fonction définie sur par .

1. Calculer la fonction dérivée de eet établir le tableau de variation de .  
 2. a. Sur la calculatrice, obtenir un tableau de valeurs de à partir de avec un pas de 100.  
 b. En déduire un réel à partir duquel .  
 c. En modifiant le pas du tableau, déterminer un réel à partir duquel .  
 d. Enoncer une conjecture sur la limite de quand tend vers .  
 3. a. Soit un entier naturel. Résoudre l’équation   
 Justifier qu’il existe une valeur de (que l’on exprimera en fonction de ) à partir de   
 laquelle .  
 b. Que peut-on en déduire sur la limite de en ?

* 1. **Limites finies**
  2. **Limite finie et Asymptotes horizontales**

Exercice 1

* 1. On donne la représentation graphique d’une fonction , quelle semble être la limite de en et en ? Quelle est l’asymptote à la courbe de en et en ?  
     
  2. On donne les limites en et en d’une fonction  :   
     Donner une interprétation graphique de chaque limite.

Exercice 2   
Soit la fonction définie sur par

* + - 1. À l’aide d’un tableau de valeurs sur la calculatrice (on pourra par exemple utiliser un pas de 10), énoncer une conjecture sur la limite éventuelle de en . Cette conjecture se retrouve-t-elle sur la représentation graphique de ?
      2. a. Montrer que, pour tout de b. Résoudre dans l’inéquation . En déduire un seuil à partir duquel  
            
         c. Soit un entier naturel. Résoudre dans l’inéquation .   
          En déduire un seuil à partir duquel .  
         d. Que peut-on en déduire sur la limite de en  ?

Exercice 3  
Soit la fonction définie sur par .

1. À l’aide d’un tableau de valeurs sur la calculatrice, énoncer une conjecture sur la limite éventuelle de en . Cette conjecture se retrouve-t-elle sur la représentation graphique de  ?
2. a. Montrer que, pour tout de   
   b. Résoudre dans l’inéquation   
    En déduire un seuil à partir duquel .  
   c. Soit un entier naturel. Résoudre dans l’inéquation .  
   d. Que peut-on en déduire sur la limite de en  ?