

Baccalauréat STI2D SIN
RÉVISION
15 mai 2013

Les fonctions

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 centimètre.

Le but de ce problème est :

- d'émettre des conjectures sur la fonction f dans la partie A ;
- d'établir des résultats concernant ces conjectures dans la partie B ;
- de vérifier la validité de ces conjectures dans la partie C.

Partie A : Lecture graphique

On a obtenu à l'aide d'un logiciel la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0; 15[$ (la courbe est fournie en annexe).

On précise que la droite T est la tangente à la courbe de la fonction f au point A d'abscisse 1.

Par simple lecture graphique, déterminer :

1. la limite de la fonction f en zéro ;
2. une valeur de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$;
3. le signe de $f(x)$ en fonction de x ;
4. le sens de variation de la fonction f ;
5. l'équation réduite de la tangente T ;
6. une valeur approchée de l'aire du domaine grisé en centimètres carrés.

Partie B : Étude d'une fonction

On admet dans cette partie que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

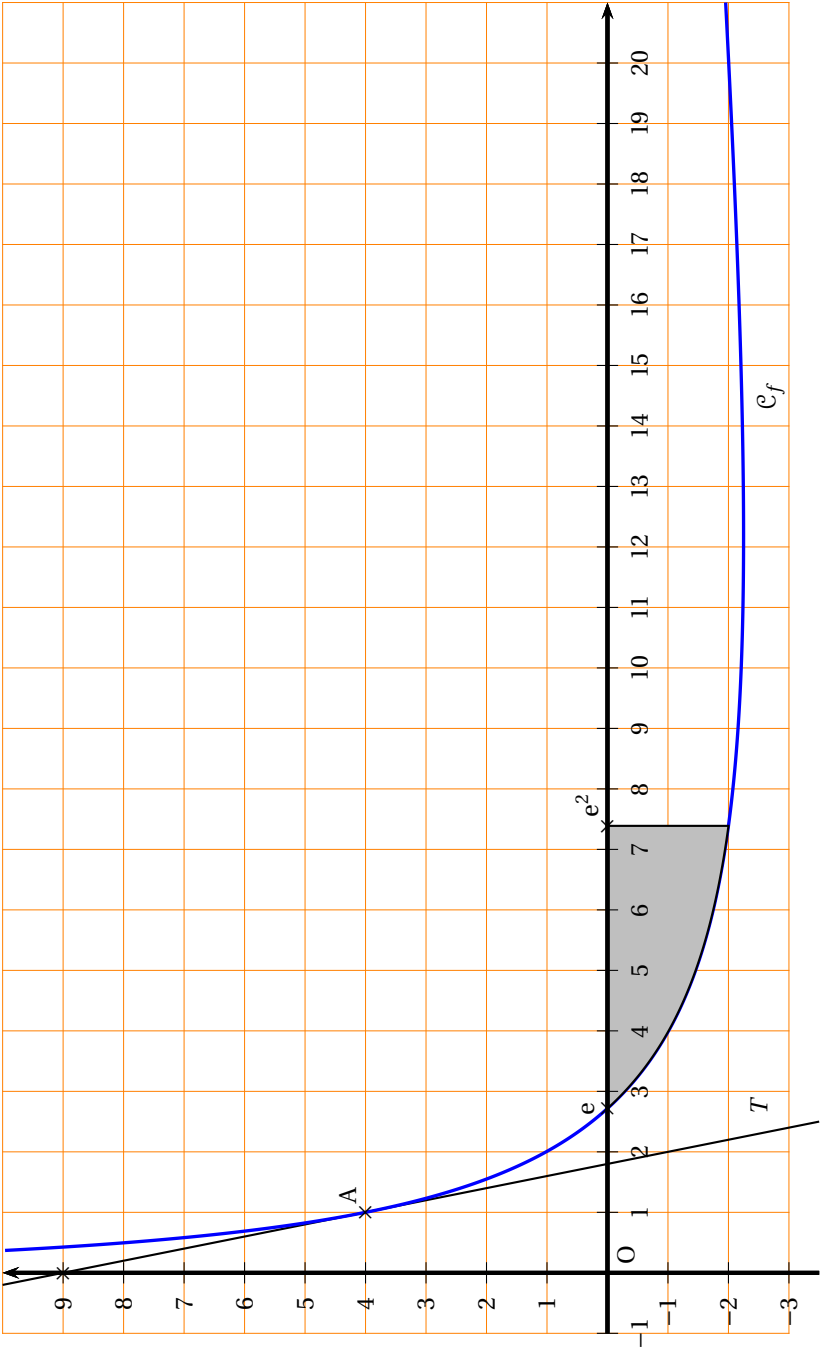
$$f(x) = (\ln x)^2 - 5 \ln x + 4$$

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en zéro.
2.
 - a. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$.
 - b. En déduire, en posant $X = \ln x$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ est du signe de $2 \ln x - 5$.
 - b. Résoudre l'inéquation $2 \ln x - 5 \geq 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Établir une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
5. On donne les fonctions g, h, G et H suivantes, définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x$, $h(x) = (\ln x)^2$, $G(x) = x \ln x - x$ et $H(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2]$.
On admet que G est une primitive de la fonction g et que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 - b. Calculer $I = \int_e^{e^2} -f(x) dx$.

Partie C : Conclusion

1. Parmi les conjectures formulées dans la partie A, indiquer en détaillant les réponses :
 - celles qui ont été vérifiées ;
 - celles qui sont fausses ;
 - celles pour lesquelles on ne peut pas conclure.On s'appuiera sur les résultats obtenus dans la partie B.
2. On souhaite tracer sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de la fonction f de manière à visualiser les résultats établis dans la partie B. Proposer un paramétrage de fenêtre de la calculatrice qui permet d'obtenir un tel tracé.

Annexe (exercice 1



EXERCICE 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, quatre réponses ou affirmations sont proposées, dont une seule est juste. Le candidat mentionnera le numéro de la question, et la lettre correspondant à la réponse juste. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point, l'absence de réponse ou une mauvaise réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de variable réelle x deux fois dérivable.

Une solution de cette équation est la fonction f vérifiant, pour tout réel x :

Réponse A : $f(x) = 4e^{-4x}$

Réponse B : $f(x) = 4e^{2x}$

Réponse C : $f(x) = 10\cos(2x) - 10\sin(2x)$

Réponse D : $f(x) = 10\cos(4x) - 10\sin(4x)$

Question 2

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (2x + 1)e^{3x+1}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Une expression de $f'(x)$ est :

Réponse A : $f'(x) = 2e^3$

Réponse B : $f'(x) = (6x + 5)e^{3x+1}$

Réponse C : $f'(x) = 2e^{3x+1}$

Réponse D : $f'(x) = (2x + 3)e^{3x+1}$

Question 3

Un jeu est basé sur une expérience aléatoire et il permet de gagner ou de perdre de l'argent. La variable aléatoire X qui représente ce gain (positif ou négatif) admet la loi de probabilité suivante.

Valeurs de X	-5	-2	0	1	6
Probabilité	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

On considère que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable X est strictement positive, équitable si elle est nulle, et défavorable au joueur si elle est strictement négative.

Réponse A : le jeu est défavorable au joueur

Réponse B : le jeu est équitable

Réponse C : le jeu est favorable au joueur

Réponse D : on ne peut pas savoir

Question 4

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = x^2 + 1$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe des abscisses. Cela engendre un solide de révolution dont le volume V , exprimé en unité de volume, est :

$$V = \pi \int_0^1 [g(x)]^2 dx.$$

La valeur exacte de V est égale à :

Réponse A : $\frac{4\pi}{3}$

Réponse B : $\frac{6\pi}{5}$

Réponse C : 4π

Réponse D : $\frac{28\pi}{15}$

Question 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]5; +\infty[$ dont la représentation graphique dans un repère du plan est notée C .

On suppose que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$. Ce résultat s'interprète ainsi :

Réponse A : la courbe C admet une asymptote d'équation $x = 5$.

Réponse B : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote d'équation $y = 5$.

Réponse C : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote oblique d'équation $y = 5x$.

Réponse D : la courbe C admet au point d'abscisse 5 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 3

Partie A - Exploitation d'informations graphiques

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = ax + b + e^{-x},$$

où a et b sont deux nombres réels que l'on va déterminer dans cette partie.

On donne les renseignements graphiques suivants sur la courbe représentative de la fonction g dans un repère d'axes (Ox) et (Oy) :

- le point A de coordonnées $(0; 4)$ appartient à cette courbe représentative ;
- la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À partir des renseignements précédents, donner la valeur de $g(0)$ ainsi que celle du nombre dérivé $g'(0)$.
2. Déterminer la valeur du nombre b en utilisant la question 1.
3. Pour tout réel x , calculer $g'(x)$ en fonction de a . En déduire la valeur du nombre a .

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 3 + e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

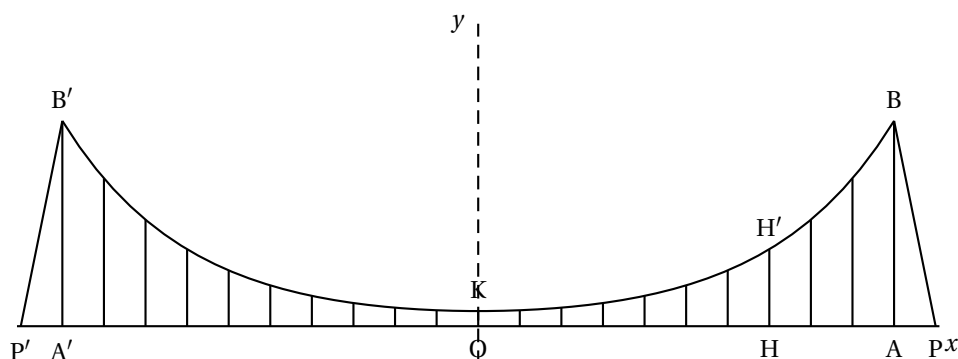
1.
 - a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - b. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.
Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .
2.
 - a. Pour tout réel x , démontrer l'égalité : $f(x) = e^{-x}(1 + xe^x + 3e^x)$.
 - b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Pour tout réel x , démontrer que $f'(x) = 1 - e^{-x}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
 - b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
4. Représenter graphiquement la courbe \mathcal{C} et son asymptote \mathcal{D} dans le même repère. On prendra pour unité 1 cm sur chacun des axes.
5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Existe-il une tangente à la courbe \mathcal{C} qui est parallèle à l'asymptote \mathcal{D} ?

Partie C - Calcul d'une aire plane

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note \mathcal{A} l'aire de ce repère, exprimée en unité d'aire.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} , puis donner sa valeur arrondie au mm^2 .

EXERCICE 4

Le dessin ci-dessous schématise la vue latérale d'un pont suspendu entre deux pylônes modélisés par les segments $[AB]$ et $[A'B']$. Les câbles verticaux, comme celui modélisé par le segment $[HH']$, sont régulièrement espacés les uns des autres. La longueur AA' est de 220 mètres.



Dans le dessin ci-dessus, le point O et les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ permettent de définir un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel le point A aura pour coordonnées $(110; 0)$, l'unité étant le mètre.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-110; 110]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{e^{0,06x} + 1}{e^{0,03x}}$$

On admet que l'arc $B'KB$ est la courbe représentative, dans le repère donné, de la fonction f sur l'intervalle $[-110; 110]$.

Partie A - Une propriété de la courbe représentative

1. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110; 110]$:

$$f(x) = e^{0,03x} + e^{-0,03x}.$$

2. On remarque que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110; 110]$,

$$f(-x) = f(x).$$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

Partie B - Étude de la fonction f

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[-110; 110]$.

$$\text{Montrer que : } f'(x) = \frac{0,03(e^{0,06x} - 1)}{e^{0,03x}}.$$

2.
 - a. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $e^{0,06x} - 1 > 0$.
 - b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-110; 110]$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. À l'aide du tableau de variation, donner en mètres :

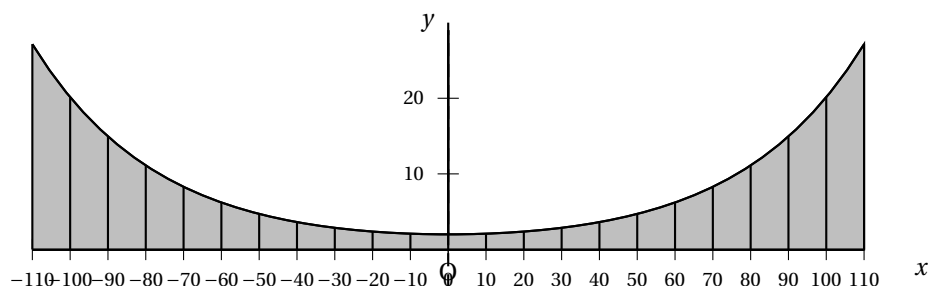
- a. la longueur du câble vertical le plus court ;
- b. la hauteur du pylône représenté par le segment [AB] dont on donnera une valeur approchée à 0,1 près.

Partie C - Étude de la résistance au vent

On s'intéresse maintenant à la résistance au vent de la structure verticale du pont suspendu.

Un bureau d'étude affirme que l'aire de la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de l'aire de la surface plane, pleine et fermée, délimitée par les segments [B'A'], [A'A], [AB] et l'arc BKB'.

Cette surface est représentée par la partie grisée sur la figure ci-dessous :



1. Soit la fonction F , définie et dérivable pour tout x de l'intervalle $[-110 ; 110]$, d'expression :

$$F(x) = \frac{100}{3} (e^{0,03x} - e^{-0,03x}).$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-110 ; 110]$.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer l'aire, exprimée en m^2 , de la surface exposée à l'action du vent.

Les nombres complexes

EXERCICE 5

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. a. En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + 2i, \quad z_B = 2 - 2i, \quad \text{et } z_C = 4.$$

- b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B .
- c. Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.
- d. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un carré.

3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe $z_D = iz_A$.

Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

EXERCICE 6

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ a pour nombre complexe conjugué :

a) $-1 - i\sqrt{3}$ b) $-1 + i\sqrt{3}$ c) $1 - i\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}$

2. L'équation $\frac{z-1}{z+1} = i$ d'inconnue z admet pour solution :

a) i b) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-i$

3. Le nombre complexe $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ a pour forme algébrique :

a) $-2 + 2i$ b) $2 + 2i$ c) $2 + i\sqrt{2}$ d) $2 - 2i$

4. Le nombre complexe $z = -4i$ a respectivement pour module et argument :

a) 4 et 0 b) 1 et $\frac{\pi}{4}$ c) 4 et $-\frac{\pi}{2}$ d) -4 et $\frac{3\pi}{2}$

5. Le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ a pour notation exponentielle :

a) $-e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ c) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ d) $-e^{i\frac{\pi}{6}}$