

EXERCICE 1**4 points**

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^3}{n^3} = -3.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{-4n^2} = 0.$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^3}{n^2} = -\infty$

EXERCICE 2**6 points**

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = 2n^2 + 4$$

1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit n un entier naturel, on résout $u_n \geq 10^3$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 4 \geq 10^3$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq 10^3 - 4$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^3 - 4}{2}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^3 - 4}{2}} \simeq 22,3$$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 23$, on a $u_n \geq 10^3$. C'est-à-dire $N_3 = 23$.

3. a. Soit p un entier naturel. Soit n un entier naturel, on résout $u_n \geq 10^p$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 4 \geq 10^p$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq 10^p - 4$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^p - 4}{2}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^p - 4}{2}}$$

- b. Donc pour tout entier naturel p , il existe un rang N_p que l'on vient de déterminer $N_p = E\left(\sqrt{\frac{10^p - 4}{2}}\right) + 1$, tel que pour tout $n \geq N_p$ on ait $u_n \geq 10^p$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
La fonction $x \mapsto E(x)$ est la partie entière de x , elle est définie pour tout nombre réel x par :
Pour tout entier naturel n si $x \in [n; n+1[$, alors $E(x) = n$.

EXERCICE 3**5 points**

Pour tout entier naturel n , on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

2. Pour tout entier naturel n non nul,

$$|v_n - 2| = \left| 2 + \frac{1}{n^2} - 2 \right| = \left| \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

Car $\frac{1}{n^2}$ est toujours positif.

3. À l'aide de l'algorithme, on trouve $N = 32$.

4. Étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$:

- a. On utilise la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction $\frac{1}{u}$:

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Ici on a $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$. D'où on déduit :

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Donc pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$. On déduit donc que la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$

- b. Soit n un entier naturel non nul, $|v_n - 2| = \frac{1}{n^2} = f(n)$. Donc pour tout entier naturel n tel que $n \geq 23$ on déduit grâce au variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$ l'équivalence avec l'inégalité suivante :

$$f(n) \leq f(23)$$

Or $f(23) = |v_{23} - 2|$ et d'après la question 2., on sait que $|v_{23} - 2| \leq 10^{-3}$. Donc à plus forte raison, on obtient pour tout entier naturel n tel que $n \geq 23$:

$$|v_n - 2| \leq 10^{-3}$$

EXERCICE 4

5 points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie pour tout entiers naturels n respectivement par :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n^3}$$

et

$$v_n = \frac{3n^3 + 2}{n^3 + 3}$$

1. Étude de la suite (u_n) .

- a. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

- b. D'après le tableau de valeurs, lorsque l'utilisateur entre la valeur $p = 3$ la valeur affichée par l'algorithme est : $n = 10$.

2. Étude de la suite (v_n)

- a. L'algorithme pour la suite (v_n) est :

| | |
|------------------|--|
| Variables : | p et n sont des entiers naturels. u est un réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de p . |
| Initialisation : | Affecter à u la valeur $\frac{2}{3}$. |
| Traitement : | Tant que $ u - 3 \geq 10^{-p}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\frac{3n^3 + 2}{n^3 + 3}$ |
| Sortie : | Afficher n . |

- b. L'algorithme renvoie pour $p = 3$ la valeur $n = 20$.