

Exercices : Probabilités et Statistique

Académie de Dijon

Formation académique 2012-2013

11 novembre 2012

[Accéder au diaporama](#)

Contenu

- 1 Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle
- 2 Introduction à la loi normale
- 3 Utilisation de la loi normale
- 4 Intervalle de fluctuation asymptotique pour une binomiale
- 5 Estimation

Introduction de la loi uniforme sur $[0;1[$

selon le document d'accompagnement 2002

1. Soit $\Omega = E_2$ l'ensemble des réels de $[0;1[$ dont l'écriture décimale comporte au plus deux chiffres après la virgule.
On choisit au hasard un nombre dans Ω .
 - a. Quelle est la probabilité de chaque nombre ?
 - b. Quelle est la probabilité de l'événement $A = \{x \in \Omega / x \in [0,3;0,7]\}$?
 - c. Si α et β sont deux éléments de Ω , quelle est la probabilité de $B = \{x \in \Omega / x \in [\alpha, \beta]\}$?
2. Soit $\Omega = E_k$ l'ensemble des réels de $[0;1[$ dont l'écriture décimale comporte au plus k chiffres après la virgule. On choisit encore au hasard un nombre dans Ω . Mêmes questions.
3. Si $\Omega = [0;1[$, comment peut-on répondre aux mêmes questions ?

[Retour au diaporama](#)

Introduction à la notion de fonction de densité

Une enquête téléphonique auprès des clients d'une banque dont les mensualités de remboursement de crédit à la consommation sont comprises entre 100 et 400 euros par mois a été réalisée.

Partie A

Voici la répartition des mensualités par classe d'amplitude 50

Intervalle	[100 ; 150[[150 ; 200[[200 ; 250[[250 ; 300[[300 ; 350[[350 ; 400[
Fréquence	0,443	0,223	0,133	0,089	0,063	0,049

- Tracer un histogramme d'aire totale égale à 1 unité.
- On interroge au hasard une des personnes auprès desquelles a été réalisée l'enquête. On choisit comme loi de probabilité sur l'univers de cette expérience aléatoire, la distribution des fréquences donnée par le tableau et on appelle X la variable aléatoire qui représente le montant mensuel du remboursement.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
 - Déterminer la probabilité de chacun des événements : $(X \leq 200)$; $(200 \leq X \leq 350)$
 - Pouvez-vous déterminer $P(120 \leq X \leq 150)$ et $P(180 \leq X \leq 220)$?
 - Que pensez-vous de la probabilité $P(X = 168,17)$?

Introduction à la notion de fonction de densité

Partie B

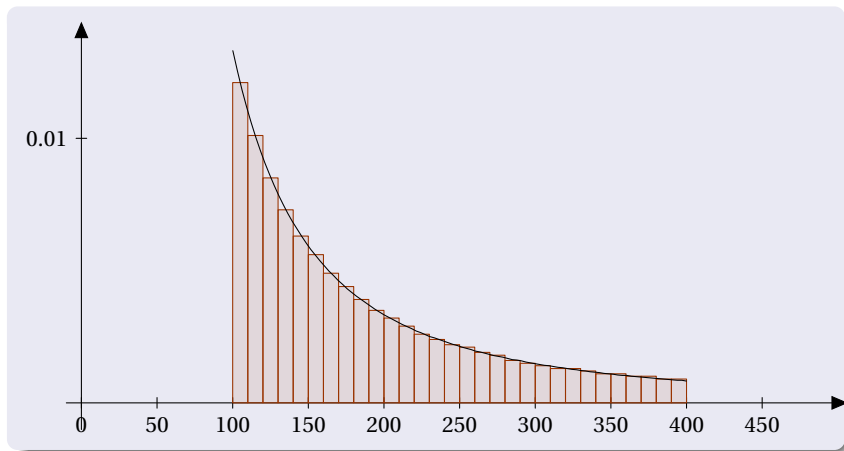
Voici des résultats de l'enquête plus précis, les classes sont d'amplitudes 10.

On note I_k l'intervalle $[10k; 10k + 10[$ avec k un entier compris entre 10 et 39.

I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	I_{18}	I_{19}
0,121	0,101	0,085	0,073	0,063	0,056	0,049	0,044	0,039	0,035
I_{20}	I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	I_{27}	I_{28}	I_{29}
0,032	0,029	0,026	0,024	0,022	0,021	0,019	0,018	0,016	0,015
I_{30}	I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	I_{37}	I_{38}	I_{39}
0,014	0,013	0,013	0,012	0,011	0,011	0,010	0,010	0,009	0,009

1. Calculer $P(120 \leq X \leq 150)$ et $P(180 \leq X \leq 220)$ et comparer avec les résultats de la partie A.
2. Pouvez-vous calculer $P(124,5 \leq X \leq 141,3)$?
3. Voici l'histogramme avec des intervalles d'amplitude 10, d'aire totale 1

Introduction à la notion de fonction de densité



Introduction à la notion de fonction de densité

On peut définir une fonction f_{10} en escalier sur l'intervalle $[100; 400[$ à l'aide du tableau suivant :

$x \in$	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	...
$f(x) =$	0,121	0,101	0,085	0,073	0,063	0,056	0,049	0,044	...

On peut remarquer que l'aire sous la courbe de la fonction f_{10} est égale à l'aire de l'histogramme et est égale à 1.

Dans ce cas, pour tout réel a, b tel que $100 < a < b < 400$, on peut définir la probabilité de l'événement $(a \leq X \leq b)$ par l'aire du domaine plan défini par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f_{10}(x) \end{cases}$

En utilisant des intervalles d'amplitude m de plus en plus petite, on peut construire des histogrammes d'aire égale à 1 et une fonction continue f tel que les histogrammes seront de plus en plus proche du domaine plan « sous la courbe » de la fonction f .

On appelle cette courbe : « courbe de tendance de l'histogramme ».

Et ici on peut prendre la fonction f définie sur $[100; 400]$ par $f(x) = \frac{400}{3x^2}$. On peut définir la probabilité de l'événement $(a \leq X \leq b)$ par l'aire du domaine plan défini par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Introduction à la notion de fonction de densité

En utilisant des intervalles d'amplitude m de plus en plus petite, on peut construire des histogrammes d'aire égale à 1 et une fonction continue f tel que les histogrammes seront de plus en plus proche du domaine plan « sous la courbe » de la fonction f .

On appelle cette courbe : « courbe de tendance de l'histogramme ».

Et ici on peut prendre la fonction f définie sur $[100;400]$ par $f(x) = \frac{400}{3x^2}$. On peut définir la probabilité de l'événement $(a \leq X \leq b)$ par l'aire du domaine plan défini par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

- Comment calculer la probabilité de la question 2) à l'aide de la fonction f ? Faire les calculs.
- Justifier sans calcul les résultats suivants en donnant une interprétation des intégrales en termes de probabilités :
 - $\int_{100}^{400} f(t)dt = 1$
 - Pour tout réel a et b tels que $100 \leq a \leq b \leq 400$, $0 \leq \int_a^b f(t)dt \leq 1$.

Exercices d'assimilation sur les lois à densité

- a. Soit $I = [1; 10]$ et une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f avec $f(t) = \lambda t^{-2}$.
Déterminer λ .
- b. Soit $I = [1; +\infty[$ et une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f avec $f(t) = \lambda t^{-2}$.
Déterminer λ .
- c. Soit $I = [0; 1]$ et une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f sur I avec $f(t) = 4t^3$.
Calculer $P([0, 25; 0, 75])$.
Calculer m tel que si on choisit un nombre dans I suivant cette loi, la probabilité qu'il soit inférieur à m soit égale à 0,5.
- d. Soit $I = [0; +\infty[$ et une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f avec $f(t) = 2e^{-2t}$.
Calculer $P([n, n + 1])$.
Calculer m tel que si on choisit un nombre dans I suivant cette loi, la probabilité qu'il soit inférieur à m soit égale à 0,5.

Exercices autour de lois uniformes

Exercice 1 :

Montrer que si une variable U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable $X = (b - a)U + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 2 : (approfondissement)

X et Y sont deux variables indépendantes* qui suivent chacune la loi uniforme dans $[0, 1]$.

Déterminer la loi des variables :

- $S = X + Y$;
- $T = \min(X, Y)$;
- $U = |Y - X|$.

* : Attention, la notion de variables indépendantes n'est pas au programme.

[Retour au diaporama](#)

Exercices autour de lois uniformes

Exercice 1 :

Montrer que si une variable U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable $X = (b - a)U + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 2 : (approfondissement)

X et Y sont deux variables indépendantes* qui suivent chacune la loi uniforme dans $[0, 1]$.

Déterminer la loi des variables :

- $S = X + Y$;
- $T = \min(X, Y)$;
- $U = |Y - X|$.

* : *Attention, la notion de variables indépendantes n'est pas au programme.*

[Retour au diaporama](#)

Introduction aux lois à densité à partir de lois uniformes (séries S, STI2D)

Soit $O(0,0)$, $I(1,0)$, $J(0,1)$.

On choisit au hasard un point M sur le segment $[OI]$ selon la loi uniforme sur ce segment. Cela revient à dire que son abscisse x suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On pose $T = \widehat{OJM}$, exprimé en degré.

1. Quelles sont les valeurs prises par T ?
2. Calculer $P(a \leq T \leq b)$, pour $0 \leq a \leq b \leq 45$.
3. Vérifier qu'il existe une fonction continue f telle que, pour $0 \leq a \leq b \leq 45$, on a : $P(a \leq T \leq b) = \int_b^a f(x) dx$.
4. Mêmes questions si l'abscisse de M est choisie au hasard sur la demi-droite $[0; +\infty[$.

Problème de la rencontre

Énoncé

Roméo et Juliette ont rendez-vous sur la Place aux Herbes de Vérone entre 8h et 9h du soir. Chacun des amoureux décide de façon aléatoire de son instant d'arrivée, dans la tranche horaire considérée.

Sachant que chacun des deux n'attend pas l'autre plus d'un quart d'heure, on s'intéresse à la probabilité p que la rencontre ait lieu. (On suppose que p existe.)

Simulation

Suivant la modélisation, on obtient $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{8}$ ou $p = \frac{7}{16}$

[Retour au diaporama](#)

Problème de la rencontre

Énoncé

Roméo et Juliette ont rendez-vous sur la Place aux Herbes de Vérone entre 8h et 9h du soir. Chacun des amoureux décide de façon aléatoire de son instant d'arrivée, dans la tranche horaire considérée.

Sachant que chacun des deux n'attend pas l'autre plus d'un quart d'heure, on s'intéresse à la probabilité p que la rencontre ait lieu. (On suppose que p existe.)

Simulation

Suivant la modélisation, on obtient $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{8}$ ou $p = \frac{7}{16}$

Retour au diaporama

Activité d'approche (modélisation discrète d'un processus de Poisson)

On prend n nombres entiers naturels au hasard dans l'intervalle $[1; n]$ Soit X la variable aléatoire associée au plus petit de ces n entiers naturels.

1. *Par exemple* : 100 personnes arrivent au hasard à l'instant $t \in [1; 100]$, t entier naturel
 X est la variable aléatoire associée à l'instant d'arrivée t_0 de la première personne.
 - a. Simuler une expérience avec un tableur.
 - b. Simuler 1000 expériences.
2. Modélisation avec un entier naturel n
 - a. Déterminer $P(X = 1)$.
 - b. Déterminer pour k entier naturel, $k \in [1; n]$, $P(X \leq k)$.
 - c. Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$?
 - d. En déduire que pour n suffisamment grand, $P(X \leq k) \geq 1 - e^{-k}$
 - e. Déterminer une fonction f tel que $\int_0^k f(x)dx = 1 - e^{-k}$ et tel que f soit une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$

Activité d'approche (modélisation discrète d'un processus de Poisson)

On prend n nombres entiers naturels au hasard dans l'intervalle $[1; n]$ Soit X la variable aléatoire associée au plus petit de ces n entiers naturels.

1. *Par exemple* : 100 personnes arrivent au hasard à l'instant $t \in [1; 100]$, t entier naturel

X est la variable aléatoire associée à l'instant d'arrivée t_0 de la première personne.

- a. Simuler une expérience avec un tableur.
- b. Simuler 1000 expériences.

2. Modélisation avec un entier naturel n

- a. Déterminer $P(X = 1)$.
- b. Déterminer pour k entier naturel, $k \in [1; n]$, $P(X \leq k)$.
- c. Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$?
- d. En déduire que pour n suffisamment grand, $P(X \leq k) \geq 1 - e^{-k}$
- e. Déterminer une fonction f tel que $\int_0^k f(x)dx = 1 - e^{-k}$ et tel que f soit une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$

Activité d'approche (modélisation discrète d'un processus de Poisson)

On prend n nombres entiers naturels au hasard dans l'intervalle $[1; n]$ Soit X la variable aléatoire associée au plus petit de ces n entiers naturels.

1. *Par exemple* : 100 personnes arrivent au hasard à l'instant $t \in [1; 100]$, t entier naturel

X est la variable aléatoire associée à l'instant d'arrivée t_0 de la première personne.

- Simuler une expérience avec un tableur.
- Simuler 1000 expériences.

2. Modélisation avec un entier naturel n

- Déterminer $P(X = 1)$.
- Déterminer pour k entier naturel, $k \in [1; n]$, $P(X \leq k)$.
- Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$?
- En déduire que pour n suffisamment grand, $P(X \leq k) \geq 1 - e^{-k}$
- Déterminer une fonction f tel que $\int_0^k f(x)dx = 1 - e^{-k}$ et tel que f soit une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$

Conclusion : on a étudié une variable aléatoire discrète qui tend asymptotiquement vers une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle

Simulation d'une loi exponentielle

Exercice :

Soit λ un réel strictement positif donné.

- Montrer que si une variable U suit la loi uniforme sur $[0; 1]$, alors la variable $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .
- Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation.

Simulation

Simulation d'une loi exponentielle

Exercice :

Soit λ un réel strictement positif donné.

- Montrer que si une variable U suit la loi uniforme sur $[0; 1]$, alors la variable $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .
- Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation.

Simulation

Contenu

- 1 Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle
- 2 Introduction à la loi normale**
- 3 Utilisation de la loi normale
- 4 Intervalle de fluctuation asymptotique pour une binomiale
- 5 Estimation

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Introduction

On a remarqué que pour les « grandes binomiales » le diagramme était symétrique et avait une forme plus ou moins en « cloche ».

Sur ce graphique, on a représenté la courbe représentative de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite et les diagrammes en bâtons des variables aléatoires suivantes :

- X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- $Y = X - np$ (Variable centrée). [invisible sur la diapositive]
- $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (Variable centrée réduite).

Le graphique est-il convaincant ?

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Activité

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On sait que $E(x) = np$ et que $V(X) = np(1-p)$

On pose $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on montrera que $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

1. *Cas particulier* : $X \sim \mathcal{B}(100, 0,4)$

On pose $Z = \frac{X-40}{\sqrt{24}}$

- Justifier que la variable aléatoire Z prend les valeurs suivantes : $z_k = \frac{k-40}{\sqrt{24}}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq 100$.
- Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?
- On désire représenter la variable Z par un histogramme d'aire totale égale à 1 (comme une loi à densité), chaque rectangle sera centré en z_k (définie dans la question a), de largeur $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{24}}$, d'aire $P(Z = z_k) = P(X = k)$.

Montrer que la hauteur est $P(X = k) \times \sqrt{24}$.

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Activité

2. Cas général :

- Justifier que la variable aléatoire prend les valeurs suivantes : $z_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
- Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?

c. Représentation graphique :

On désire représenter la variable Z par un histogramme (comme une loi à densité), chaque rectangle centré en z_k (définie dans la question 1), de largeur $\frac{1}{\sigma}$ d'aire $P(Z = z_k) = P(X = k)$.

Montrer que la hauteur est $P(X = k) \times \sigma$.

Avec geogebra, créer successivement

- Un curseur n allant de 10 à 1000
- Un curseur p allant de 0 à 1
- Les nombres $m = np$ et $s = \sqrt{np(1-p)}$
- $Abcisse = \text{Séquence}[(k-m)/s, k, 0, n]$
- $Proba = \text{Séquence}[\text{Combinaison}[n, k] p^k (1-p)^{(n-k)}, k, 0, n]$
OU $Proba = \text{Séquence}[\text{Binomiale}[n, p, false], k, 0, n]$
- $H = \text{Barres}[Abcisse, Proba * s]$

Faire varier n et p que peut-on observer ?

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Activité

2. Cas général :

- Justifier que la variable aléatoire prend les valeurs suivantes : $z_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
- Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?
- Représentation graphique :**

On désire représenter la variable Z par un histogramme (comme une loi à densité), chaque rectangle centré en z_k (définie dans la question 1), de largeur $\frac{1}{\sigma}$ d'aire $P(Z = z_k) = P(X = k)$.
Montrer que la hauteur est $P(X = k) \times \sigma$.

Avec geogebra, créer successivement

- Un curseur n allant de 10 à 1000
- Un curseur p allant de 0 à 1
- Les nombres $m = np$ et $s = \sqrt{np(1-p)}$
- $Abcisse = \text{Séquence}[(k-m)/s, k, 0, n]$
- $Proba = \text{Séquence}[\text{Combinaison}[n, k] p^k (1-p)^{(n-k)}, k, 0, n]$
OU $Proba = \text{Séquence}[\text{Binomiale}[n, p, false], k, 0, n]$
- $H = \text{Barres}[Abcisse, Proba*s]$

Faire varier n et p que peut-on observer ?

- On introduit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Représenter f sur la même figure que

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Activité

2. Cas général :

- Justifier que la variable aléatoire prend les valeurs suivantes : $z_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
- Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?
- Représentation graphique :**
On désire représenter la variable Z par un histogramme (comme une loi à densité), chaque rectangle centré en z_k (définie dans la question 1), de largeur $\frac{1}{\sigma}$ d'aire $P(Z = z_k) = P(X = k)$.
Montrer que la hauteur est $P(X = k) \times \sigma$.

Avec geogebra, créer successivement

- Un curseur n allant de 10 à 1000
- Un curseur p allant de 0 à 1
- Les nombres $m = np$ et $s = \sqrt{np(1-p)}$
- $\text{Abscisse} = \text{Séquence}[(k-m)/s, k, 0, n]$
- $\text{Proba} = \text{Séquence}[\text{Combinaison}[n, k] p^k (1-p)^{(n-k)}, k, 0, n]$
OU $\text{Proba} = \text{Séquence}[\text{Binomiale}[n, p, \text{false}], k, 0, n]$
- $H = \text{Barres}[\text{Abscisse}, \text{Proba} * s]$

Faire varier n et p que peut-on observer ?

- On introduit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Représenter f sur la même figure que l'histogramme.
Que constate-t-on ?

Vers le Théorème de Moivre-Laplace

Activité

Fichier Geogebra obtenu

Retour au diaporama

Contenu

- 1 Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle
- 2 Introduction à la loi normale
- 3 Utilisation de la loi normale**
- 4 Intervalle de fluctuation asymptotique pour une binomiale
- 5 Estimation

Calculs de seuils et probabilités avec les TICE

Loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$P = P(a \leq X \leq b)$, $Q = P(X \leq b)$, α tel que $P(X \leq \alpha) = p$

Calculatrices :

TI :

P : *normalFRép(a,b,μ,σ)*

ou *normCdf*.

α : *2nde FracNormale(p,μ,σ)*

ou *invNorm*.

Casio :

P : *Ncd(a,b,σ,μ)*

α : *InvN(p,σ,μ)*

Tableurs :

OpenOffice/LibreOffice :

Q : *=LOI.NORMALE(b ; μ ; σ)*

α : *=LOI.NORMALE.INVERSE(p ; μ ; σ)*

Fiche papier

Autres outils :

Geogebra :

Q : *Normale[μ,σ,b]*

α : *InverseNormale[μ,σ,p]*

Algobox :

Q : *ALGOBOX_LOI_NORMALE(μ,σ,b)*

ALGOBOX_LOI_NORMALE_CR(b) renvoie la réponse pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

α : *ALGOBOX_INVERSE_LOI_NORMALE(μ,σ,p)*

ALGOBOX_INVERSE_LOI_NORMALE_CR(p) renvoie la réponse pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Xcas :

Q : *normald_cdf(μ ; σ ; b)*

α : *normald_icdf(μ,σ,p)*

Scilab :

Q : *loi_normale(b,μ,σ)*

α : *cdfnlor("X",μ,σ,p,1 - p)*

Exercice : erreurs de mesure

On considère que la mesure de la résistance d'un conducteur, effectuée avec un ohmmètre, est une variable aléatoire X qui suit une loi normale. Des relevés statistiques permettent d'estimer que la moyenne est $\mu = 82$ ohm et l'écart-type $\sigma = 0,2$ ohm.

On mesure à nouveau cette résistance.

Quelle est la probabilité qu'elle soit inférieure à 81 ohm ? comprise entre 81,7 et 82,5 ohm ?

Déterminer le réel h tel que $P(82 - h \leq X \leq 82 + h) = 0,95$.

Exercice

La durée de vie d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% des appareils ait une durée de vie comprise entre 120 et 200 jours, et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

- Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

[Retour au diaporama](#)

Exercice : erreurs de mesure

On considère que la mesure de la résistance d'un conducteur, effectuée avec un ohmmètre, est une variable aléatoire X qui suit une loi normale. Des relevés statistiques permettent d'estimer que la moyenne est $\mu = 82$ ohm et l'écart-type $\sigma = 0,2$ ohm.

On mesure à nouveau cette résistance.

Quelle est la probabilité qu'elle soit inférieure à 81 ohm ? comprise entre 81,7 et 82,5 ohm ?

Déterminer le réel h tel que $P(82 - h \leq X \leq 82 + h) = 0,95$.

Exercice

La durée de vie d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% des appareils ait une durée de vie comprise entre 120 et 200 jours, et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

- Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

[Retour au diaporama](#)

Le restaurant d'un bateau de croisière assure 2 services successifs (à 19h30 et à 21h30) pour le dîner de 1000 personnes. On suppose que chacune de ces 1000 personnes choisit, au hasard et de manière indépendante, un des deux services. Le restaurant dispose de n places. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi le premier service.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance μ ? son écart-type σ ?
2. En approchant $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ par une loi normale, déterminer n le plus petit possible pour que la probabilité de ne pouvoir accepter à l'un des services toutes les personnes se présentant soit inférieure à 0,01.
3. En fait 60% des personnes en moyenne choisissent le deuxième service. Combien faut-il alors prévoir de place au restaurant pour avoir les mêmes conditions?

Méthodologie : carte de contrôle lorsque le caractère étudié suit une loi normale

Dans tous les processus de production, deux objets fabriqués n'ont jamais exactement les mêmes caractéristiques mesurables (masse, dimensions etc...)

Le contrôle d'un processus de production consiste à vérifier la stabilité de la fabrication dans le temps, c'est à dire la stabilité des valeurs d'une caractéristique choisie.

La démarche à suivre sur un exemple :

Pour contrôler la qualité de production d'une chaîne qui remplit des pots de moutarde de 195 g (masse affichée sur l'étiquette), on va :

- a) - prélever des échantillons de taille 5 au cours de la fabrication,
- b) - mesurer, pour chaque échantillon, la masse de moutarde contenue dans chacun des 5 pots et calculer la moyenne des valeurs obtenues,
- c) - vérifier si ces moyennes sont comprises entre des valeurs limites qu'on aura préalablement déterminées,
- d) - agir en conséquence.

Méthodologie : carte de contrôle lorsque le caractère étudié suit une loi normale

Comment agir en cours de fabrication ?

Si la valeur moyenne de l'échantillon est entre les limites de surveillance, le processus de fabrication est jugé satisfaisant.

Si la valeur moyenne de l'échantillon est entre une limite de surveillance et une limite de contrôle, on donne l'alerte et on prélève immédiatement un nouvel échantillon.

Si la valeur n'est pas entre les limites de contrôle, réglage du processus de fabrication.

Ainsi la probabilité de donner une fausse alerte qui entraîne un autre prélèvement d'échantillon est de 5% ; la probabilité de donner une fausse alerte qui entraîne un arrêt de la production (fausse alerte assez coûteuse) est de 0,2%.

Remarque : on peut aussi contrôler l'étendue ou l'écart-type des mesures faites sur chaque échantillon prélevé ; les procédés mis en place sont plus complexes.

[Retour au diaporama](#)

Exercice : carte de contrôle lorsque le caractère étudié suit une loi normale

Pour contrôler la qualité de production d'une chaîne qui remplit des pots de moutarde de 195 g (masse affichée sur l'étiquette), on modélise le prélèvement d'un échantillon de 5 pots dans la chaîne de fabrication :

On note X_i ($1 \leq i \leq 5$), les variables aléatoires qui à chaque pot prélevé associe la masse de moutarde qu'il contient. On suppose que les variables X_i suivent toutes une loi normale d'espérance $\mu = 195$ et d'écart-type $\sigma = 2,5$.

On admet alors que la variable aléatoire M_5 définie par $M_5 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$ suit une loi normale d'espérance $\mu = 195$ et d'écart-type $\sigma = \frac{2,5}{\sqrt{5}}$.

1. a. Déterminer les valeurs exactes des limite inférieure de contrôle (LIC) et limite supérieure de contrôle (LSC) du processus de fabrication des pots de moutarde.
b. Déterminer les valeurs exactes des limite inférieure de surveillance (LIS) et limite supérieure de surveillance (LSS) du processus de fabrication des pots de moutarde.

Exercice : carte de contrôle lorsque le caractère étudié suit une loi normale

- ...
- On a prélevé 20 échantillons de 5 pots de moutarde. La **figure 1** donne, pour chaque échantillon, la moyenne des masses de moutarde contenue dans les pots. Les limites de contrôle et de surveillance sont aussi représentées.
D'après les résultats obtenus **figure 1**, combien de fois l'alerte avec prélèvement immédiat d'un nouvel échantillon a-t-elle été donnée ? Combien de fois le processus a-t-il été arrêté ?

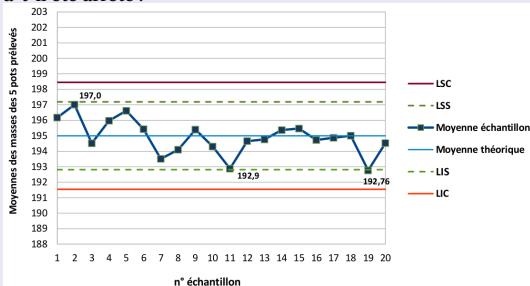


figure 1 :
Moyennes
obtenues pour 20
échantillons de 5
pots de moutarde.

- Suite à un dérèglement du processus de fabrication, la moyenne μ de la loi normale que suivent les variables aléatoires X_i ($1 \leq i \leq 5$) et M_5 , subit un dérèglement de + 4 grammes ; l'écart-type n'a pas été modifié.
Calculer la probabilité que la moyenne du prochain échantillon soit située à l'extérieur des limites de contrôle.

Exercice :carte de contrôle lorsque le caractère étudié suit une loi normale

- ...
- On a prélevé 20 échantillons de 5 pots de moutarde. La **figure 1** donne, pour chaque échantillon, la moyenne des masses de moutarde contenue dans les pots. Les limites de contrôle et de surveillance sont aussi représentées. D'après les résultats obtenus **figure 1**, combien de fois l'alerte avec prélèvement immédiat d'un nouvel échantillon a-t-elle été donnée? Combien de fois le processus a-t-il été arrêté?

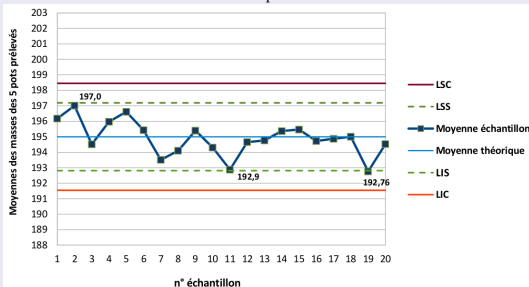


figure 1 :
Moyennes obtenues
pour 20 échantillons de
5 pots de moutarde.

- Suite à un dérèglage du processus de fabrication, la moyenne μ de la loi normale que suivent les variables aléatoires X_i ($1 \leq i \leq 5$) et M_5 , subit un dérèglage de + 4 grammes ; l'écart-type n'a pas été modifié. Calculer la probabilité que la moyenne du prochain échantillon soit située à l'extérieur des limites de contrôle. [Retour au diaporama](#)

Simulation d'une loi normale par sommation de variables uniformes

Simulation à l'aide d'un tableur

Simulation avec 12 variables uniformes

Simulation avec 48 variables uniformes

Remarque : Ces simulations constituent l'introduction de la loi normale en STI2D.

Définition de la loi normale

Contenu

- 1 Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle
- 2 Introduction à la loi normale
- 3 Utilisation de la loi normale
- 4 Intervalle de fluctuation asymptotique pour une binomiale
- 5 Estimation

Prise de décision

Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée gestationnelle est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6%. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres. Il est décidé de réaliser une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible.

Les chercheurs décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée.

Finalement le nombre d'enfants prématurés est de 50.

Quelle est donc la conclusion ?

Prise de décision

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%.

Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.

Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La **règle de décision** prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

Prise de décision

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%.

Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.

Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La **règle de décision** prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

4. Représenter graphiquement la taille de l'échantillon nécessaire en fonction de la valeur p_{sup} de la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Surréservation :

Pour compenser le manque à gagner, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre n de réservations supérieur à 300. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et on évalue la probabilité de désistement de chacun d'eux à 0.1.

On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné.

On appelle S_n la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement pour ce vol.

Surréservation :

1. Dans un premier temps, la compagnie décide de vendre 320 billets. Déterminer la probabilité qu'il se présente exactement 300 passagers. Puis déterminer la probabilité qu'il se présente un nombre de passagers inférieur ou égale à 300.
2. La compagnie veut augmenter le nombre de billets vendus tout en maîtrisant le risque lié au dédommagement.

On se propose donc de chercher une plus grande valeur pour n . Cette valeur devra vérifier $P(S_n \leq 300) \geq 0,95$, de façon à réduire à peu de chose les frais de dédommagement.

- a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n de $\frac{S_n}{n}$ au seuil 0,95.
- b. Justifier que si la borne supérieure de I_n est inférieure ou égale à $\frac{300}{n}$ alors

$$P(S_n \leq 300) \geq P\left(\frac{S_n}{n} \in I_n\right).$$

Nous admettons que si la borne supérieure de I_n est inférieure ou égale à $\frac{300}{n}$ alors $P(S_n \leq 300) \geq 0,95$.

- c. En posant $f(x) = 0,9x + 0,588\sqrt{x} - 300$, déduire de la question précédente que tous les entiers naturels n tel que $f(n) \leq 0$, permettent d'assurer que $P(S_n \leq 300) \geq 0,95$.
- d. En étudiant le signe de $f(x)$, déterminer le plus grand entier vérifiant $f(x) \leq 0$.
- e. L'entier obtenu à la question précédente est-il l'entier le plus grand tel que $P(S_n \leq 300) \geq 0,95$?

(Vous justifierez votre réponse en déterminant l'entier le plus grand tel que $P(S_n \leq 300) \geq 0,95$ à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice).

Contenu

- 1 Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle
- 2 Introduction à la loi normale
- 3 Utilisation de la loi normale
- 4 Intervalle de fluctuation asymptotique pour une binomiale
- 5 Estimation

Exemple d'appel

Lors d'une élection, deux candidats sont en lice : A et B. On procède à un sondage (aléatoire, avec remise) auprès d'un échantillon de 1000 personnes. 52% déclarent vouloir voter pour A.

1. Vous êtes journaliste, que devez-vous annoncer ?

Exemple d'appel (suite)

Lors d'une élection, deux candidats sont en lice : A et B. On procède à un sondage (aléatoire, avec remise) auprès d'un échantillon de 1000 personnes. 52% déclarent vouloir voter pour A.

1. Vous êtes journaliste, que devez-vous annoncer ?
2. a) Quelle doit être la taille minimale d'un échantillon pour que l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% ait une amplitude de 0,01 (1%) ?
b) Quelle doit être la taille minimale d'un échantillon où est observée une fréquence de 0,52 pour que le journaliste puisse annoncer au niveau de confiance de 95% que le candidat A sera élu ?

Exercices

Taux de satisfaction

Un opérateur téléphonique désire connaître la proportion de satisfaits parmi le grand nombre de ses abonnés. Pour cela, il interroge 400 abonnés choisis au hasard. Il constate que 345 sont satisfaits. Déterminer l'intervalle de confiance de la proportion d'abonnés satisfaits chez cet opérateur, au niveau de confiance 0,95.

Elections présidentielles

Lors du premier tour des élections présidentielles de 2002, le dernier sondage publié par l'institut BVA effectué sur 1000 électeurs qu'on suppose choisis de manière aléatoire, prévoyait : J. Chirac : 19% ; L. Jospin : 18% ; J.M. Le Pen : 14%. Les résultats ont été : J. Chirac : 19,88% ; L. Jospin : 16,18% ; J.M. Le Pen : 16,86%.

1. Déterminer pour chaque candidat l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion d'électeurs votant pour lui.
2. Ce dernier sondage permettait-il de classer les trois candidats, au niveau de confiance de 0,95 ?

Exercices

Taux de satisfaction

Un opérateur téléphonique désire connaître la proportion de satisfaits parmi le grand nombre de ses abonnés. Pour cela, il interroge 400 abonnés choisis au hasard. Il constate que 345 sont satisfaits. Déterminer l'intervalle de confiance de la proportion d'abonnés satisfaits chez cet opérateur, au niveau de confiance 0,95.

Elections présidentielles

Lors du premier tour des élections présidentielles de 2002, le dernier sondage publié par l'institut BVA effectué sur 1000 électeurs qu'on suppose choisis de manière aléatoire, prévoyait : J. Chirac : 19% ; L. Jospin : 18% ; J.M. Le Pen : 14%. Les résultats ont été : J. Chirac : 19,88% ; L. Jospin : 16,18% ; J.M. Le Pen : 16,86%.

1. Déterminer pour chaque candidat l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion d'électeurs votant pour lui.
2. Ce dernier sondage permettait-il de classer les trois candidats, au niveau de confiance de 0,95 ?

Exercices

Elections présidentielles

Lors du premier tour des élections présidentielles de 2002, le dernier sondage publié par l'institut BVA effectué sur 1000 électeurs qu'on suppose choisis de manière aléatoire, prévoyait : J. Chirac : 19% ; L. Jospin : 18% ; J.M. Le Pen : 14%. Les résultats ont été : J. Chirac : 19,88% ; L. Jospin : 16,18% ; J.M. Le Pen : 16,86%.

1. Déterminer pour chaque candidat l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion d'électeurs votant pour lui.
2. Ce dernier sondage permettait-il de classer les trois candidats, au niveau de confiance de 0,95 ?
3. On considère le dernier sondage réalisé par l'institut IPSOS sur 1000 électeurs. Il prévoyait J. Chirac : 19,5% ; L. Jospin : 17% ; J.M. Le Pen : 13,5%.
On considère qu'en regroupant les sondages BVA et IPSOS, on obtient un échantillon de 2000 électeurs choisis aléatoirement.
A partir ce nouvel échantillon, déterminer pour chaque candidat l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion d'électeurs votant pour lui.

Exercices

Une entreprise fabrique une grande quantité de Smartphones sur deux chaînes de production situées dans deux ateliers.

On prélève au hasard 600 Smartphones sur chacune des chaînes et on compte le nombre d'appareils conformes au cahier des charges.

On constate que :

Sur la première chaîne, 552 Smartphones sont conformes.

Sur la seconde, 570 Smartphones sont conformes.

Peut-on conclure, au niveau de confiance de 0,95, que les deux chaînes produisent la même proportion de Smartphones conformes ?

Exercices

Un laboratoire pharmaceutique veut tester l'efficacité d'un nouveau médicament utilisé pour faire baisser le taux de cholestérol.

Pour cela, on administre à 300 patients (groupe A), choisis de manière aléatoire, ce nouveau médicament, puis à 300 autres patients (groupe B), choisis de manière aléatoire, un placebo sans principe actif.

Dans le groupe A, 234 ont vu leur taux de cholestérol baisser.

Dans le groupe B, 201 ont vu leur taux de cholestérol baisser.

Peut-on en déduire, au niveau de confiance 0,95, que ce nouveau médicament est efficace ?

Exercices

Une société d'assurance récemment arrivée sur le marché souhaite connaître sa notoriété auprès des adultes. Elle interroge 2500 personnes âgées de 18 ans et plus et constate que 342 personnes seulement connaissent son existence. Elle décide de lancer une campagne de publicité pendant un mois, à l'issue duquel elle interroge à nouveau 2500 personnes âgées de 18 ans et plus. 445 personnes répondent alors qu'elles connaissent la société.

Peut-on en déduire, au niveau de confiance de 0,95 que la campagne de publicité a été bénéfique ?

[Retour au diaporama](#)