

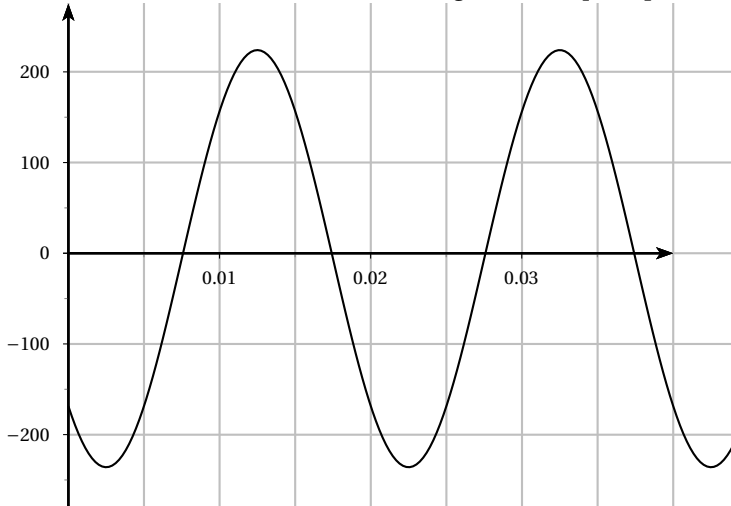
## Devoir surveillé 4

20 mars 2013

### EXERCICE

**8 points**

Dans cette exercice on s'intéresse à un signal électrique représenté ci-dessous :



Il s'agit d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = 230 \sin\left(\pi \times 100t + \frac{\pi}{4}\right).$$

On rappelle qu'un signal est donnée par une fonction de la forme  $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$  où  $\omega$  est la pulsation donnée par  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  avec  $T$  la période (en seconde),  $A$  est la valeur maximale du courant (en Volts) et  $\varphi$  le déphasage (en Radian).

Le but de cet exercice est de calculer la valeur efficace de ce signal. On donne la formule générale pour un courant alternatif  $u(t)$ , la valeur efficace est définie par :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

1. **a.** Quelle est la période de ce signal ?  
D'après la forme générale d'un signal, ( $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ ), on identifie la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi$ .  
D'où on déduit la période :  $T = \frac{2}{100} = 0,02$  s.
- b.** En déduire sa fréquence.  
La fréquence est  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50$  Hz.
2. En utilisant la formule de linéarisation :

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Montrer que pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,

$$f^2(t) = 26\,450 \left(1 - \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left(230 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 \\ &= 230^2 \times \sin^2\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 52\,900 \frac{1 - \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \\ &= 26\,450 \left(1 - \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$g(t) = 26\,450t + \frac{26\,450}{200\pi} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

est une primitive de  $f^2$ .

Calculons  $g'$  la dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 26\,450 + \frac{26\,450}{200\pi} (-200\pi \cos(200\pi t + \frac{\pi}{2})) \\ &= 26\,450 - 26\,450 \cos(200\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &= f^2(t) \end{aligned}$$

4. Donner une valeur exacte puis une valeur approché de  $I$  définie par :

$$I = \int_0^{0,02} f^2(t) dt$$

$$\begin{aligned} I &= [g(t)]_0^{0,02} \\ &= g(0,02) - g(0) \\ &= 26\,450 \times 0,02 + \frac{26\,450}{200\pi} \sin(200\pi \times 0,02 + \frac{\pi}{2}) - (26\,450 \times 0 + \frac{26\,450}{200\pi} \sin(200\pi \times 0 + \frac{\pi}{2})) \\ &= 529 + \frac{529}{\pi} \sin(4\pi + \frac{\pi}{2}) - \frac{529}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= 529. \end{aligned}$$

5. En déduire une valeur approché de  $V_{eff}$ .

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{0,02} \times 529} \approx 162,63.$$

### PROBLÈME

12 points

Le problème est composé de deux parties, les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Nous étudions la probabilité qu'une panne apparaisse sur un modèle de télévision.

### PATRIE A

Les téléviseurs présentent un défaut récurrent. La probabilité qu'un appareil soit tombé en panne au bout de 1 000 h de fonctionnement est de 0.11.

1. Sachant qu'une famille française regarde en moyenne la télévision 3 h 25 min par jour<sup>1</sup>. Déterminer le nombre moyen de jours pour qu'un appareil présentant le défaut en question tombe en panne.

En heure la moyenne d'utilisation d'une télévision française est de 3,417 h par jour.

Donc il faudra en moyenne 293 jours pour que ces appareil présentant ce défaut tombe en panne.

$$\left(\frac{1\,000}{3,417} \approx 292,65\right)$$

2. Le service client décide de réaliser une étude de satisfaction, et de contacter des utilisateurs de ce matériel au bout d'un an afin d'en connaître la satisfaction.

Chaque conseiller contacte 8 clients.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de client contacter par un conseiller dont leur téléviseur est repartie en garantie.

- a. Justifier qu'on puisse modéliser la variable aléatoire  $X$  par une loi binomiale, en donner ces paramètres.

On suppose que l'expérience est réalisée sur un grand nombre de personnes, on peut assimiler le tirage réalisé par les conseillers à tirage successif avec remise. Donc la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 8$  et  $p = 0,11$ .

1. source INSEE

- b. Quelle est la probabilité qu'un opérateur du service client ne contacte que des personnes dont leur télévision fonctionne toujours ?

$$P(X = 0) \approx 0,39.$$

- c. Déterminer la probabilité qu'il y est exactement un client dont l'appareil est reparti en garantie.

$$P(X = 1) \approx 0,39.$$

- d. Quelle est la probabilité qu'au plus l'un des clients ait envoyé son appareil en garantie.

$$P(X \leq 1) \approx 0,78.$$

3. Un conseiller s'interroge, il a contacté 8 personnes et sur ces 8 personnes 4 ont leur téléviseur qui est repartie en garantie. Cela est-il normal? Justifier.

Le tableau suivant donne  $P(X \leq k)$  pour  $k$  un entier naturel variant entre 0 et 8.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X \leq k)$	0,394	0,783	0,951	0,993	0,999	1	1	1	1

Lorsque nous déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% on prend  $a = 0$  et  $b = 3$ . Donc l'intervalle de fluctuation est  $[\frac{0}{8}; \frac{3}{8}] = [0; 0,375]$ .

La fréquence observée par l'opérateur est de 0,5. Ce qui est en dehors de l'intervalle de fluctuation. Situation rare mais pouvant se produire dans 5% des cas.

#### PATRIE B

Après une recherche approfondie, le défaut de la PATRIE A était dû à une erreur de codage dans la puce électronique, pouvant être résolu simplement par une mise à jours sur internet.

L'entreprise réalise une étude statistique sur le nombre d'heures moyenne d'utilisation avant de voir apparaître la première panne. Elle détermine que la variable aléatoire  $Y$  qui associe le temps d'utilisation pour qu'une télévision tombe en panne suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 10^{-4}$ .

1. Quelle est la probabilité qu'un téléviseur soit tombé en panne au bout de 1 000 h de fonctionnement.

$$P(Y \leq 1\,000) = 1 - e^{-0,000\,1 \times 1\,000} = 1 - e^{-0,1} \approx 0,095$$

2. Calculer le temps moyen de fonctionnement de ce modèle de télévision.

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4.$$

Donc le temps moyen de fonctionnement de ces téléviseurs est de 10 000 h.

3. Dans cette question toute trace de recherche ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Au vue du modèle adopté, au bout de combien d'heure de fonctionnement 60% des télévisions vendues seront tombées en panne?

Dans cette question, on cherche à déterminer  $t$  tel que  $P(Y \leq t) = \frac{60}{100}$ .

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= \frac{60}{100} \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-0,000\,1t} &= 0,6 \\ \Leftrightarrow -e^{-0,000\,1t} &= -0,4 \\ \Leftrightarrow e^{-0,000\,1t} &= 0,4 \\ \Leftrightarrow \ln(e^{-0,000\,1t}) &= \ln(0,4) \\ \Leftrightarrow -0,000\,1t &= \ln(0,4) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\ln(0,4)}{-0,000\,1} \\ \Leftrightarrow t &\approx 9\,163. \end{aligned}$$

Donc au bout 9 163 h de fonctionnement 60% des télévisions seront tombées en panne.