

Durée : 4 heures

**Baccalauréat STI**  
**Génie mécanique (options A et F)**  
**Génie civil, Génie énergétique**  
**Antilles-Guyane 13 septembre 2012**

Dans tout le sujet, on désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

**EXERCICE 1**

**6 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm. On désigne par  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. On donne  $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 27$  où  $z$  est un nombre complexe.
  - a. Calculer  $P(3)$ .  
Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ ,  $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$ .
  - b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z^2 - 3z + 9 = 0$  puis en déduire les solutions de  $P(z) = 0$ .
2. On considère les points A, B et F d'affixes respectives

$$z_A = 3, \quad z_B = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad z_F = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

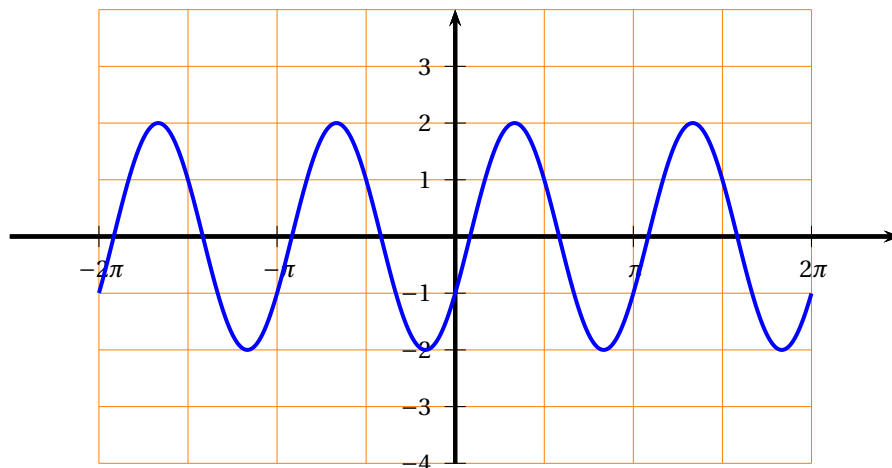
- a. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes  $z_A, z_B$  et  $z_F$ .
- b. Justifier que les points A, B et F sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
- c. Placer les points A, B et F dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- d. Calculer les distances AB et AF ; quelle est la nature du quadrilatère OBAF ?

**EXERCICE 2**

**4 points**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-2\pi ; 2\pi]$  par

$$f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$



1.
  - a. Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 2$  dans l'intervalle  $[-2\pi ; 2\pi]$ .
  - b. Résoudre l'équation  $f(x) = 2$  sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .
2. On note (E) l'équation différentielle  $y'' + 4y = 0$ , où  $y$  est une fonction définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $y''$  sa fonction dérivée seconde.
  - a. Résoudre l'équation (E).
  - b. Déterminer la solution particulière  $g$  de (E) qui vérifie  $g(0) = -1$  et  $g'(0) = 2\sqrt{3}$  où  $g'$  désigne la fonction dérivée de  $g$ .
  - c. Comparer  $f(x)$  et  $g(x)$  pour  $x \in [-2\pi ; 2\pi]$ .  
*On rappelle que pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ .*

*Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera en prise en compte dans la notation.*

### PROBLÈME

**10 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{6e^x}{e^x + 5}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

#### PARTIE A : Étude de la fonction $f$

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Montrer que pour tout réel  $x$  on a  $f'(x) = \frac{30e^x}{(e^x + 5)^2}$  puis étudier le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .
2.
  - a. Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$ .
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  et en déduire l'existence de deux asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  à la courbe  $\mathcal{C}$ . On précisera une équation de chacune de ces asymptotes.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que l'équation réduite de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$  au point d'abscisse 0 est  $y = \frac{5}{6}x + 1$ .
5. Dans le repère, tracer la courbe  $\mathcal{C}$ , ainsi que les droites  $\mathcal{T}$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sur une feuille de papier millimétré.

#### PARTIE B : Résolution d'une équation

1. Justifier que l'équation  $f(x) = 4$  admet une solution unique  $x_0$  sur l'intervalle  $[1 ; 5]$ .
2. Graphiquement, donner un encadrement de  $x_0$  à l'unité près, et placer  $x_0$  sur le graphique.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale arrondie au centième de  $x_0$ .

#### PARTIE C : Un calcul d'aire

1. a. Montrer que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$G(x) = \ln(e^x + 5)$$

est une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 5}$ .

- b. En déduire une primitive  $H$  de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = \frac{6e^x}{e^x + 5} - \left(\frac{5}{6}x + 1\right).$$

2. a. Hachurer sur le graphique, le domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$ , la tangente  $\mathcal{T}$  ainsi que les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 2$ .

- b. On admet que la fonction  $h$  est positive sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

Montrer que la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire  $\mathcal{A}$  de ce domaine

$$\text{est } \mathcal{A} = 6 \ln\left(\frac{e^2 + 5}{6}\right) - \frac{11}{3}.$$