

**EXERCICE 1****4 points**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^3}{n^3} = -3.$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{-4n^2} = 0.$
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^3}{n^2} = -\infty$

**EXERCICE 2****6 points**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$u_n = 2n^2 + 4$$

1. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel, on résout  $u_n \geq 10^3$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 4 \geq 10^3$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq 10^3 - 4$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^3 - 4}{2}$$

Comme la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  :

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^3 - 4}{2}} \simeq 22,3$$

Donc pour tout entier naturel  $n \geq 23$ , on a  $u_n \geq 10^3$ . C'est-à-dire  $N_3 = 23$ .

3. a. Soit  $p$  un entier naturel. Soit  $n$  un entier naturel, on résout  $u_n \geq 10^p$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 4 \geq 10^p$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq 10^p - 4$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^p - 4}{2}$$

Comme la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  :

$$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^p - 4}{2}}$$

- b. Donc pour tout entier naturel  $p$ , il existe un rang  $N_p$  que l'on vient de déterminer  $N_p = E\left(\sqrt{\frac{10^p - 4}{2}}\right) + 1$ , tel que pour tout  $n \geq N_p$  on ait  $u_n \geq 10^p$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .  
La fonction  $x \mapsto E(x)$  est la partie entière de  $x$ , elle est définie pour tout nombre réel  $x$  par :  
Pour tout entier naturel  $n$  si  $x \in [n; n+1[$ , alors  $E(x) = n$ .

**EXERCICE 3****5 points**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(v_n)$  par :

$$v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

1. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$|v_n - 2| = \left| 2 + \frac{1}{n^2} - 2 \right| = \left| \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

Car  $\frac{1}{n^2}$  est toujours positif.

3. À l'aide de l'algorithme, on trouve  $N = 32$ .

4. Étude de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  :

- a. On utilise la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction  $\frac{1}{u}$  :

$$\left( \frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Ici on a  $u(x) = x^2$  donc  $u'(x) = 2x$ . D'où on déduit :

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Donc pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ . On déduit donc que la fonction  $f$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$

- b. Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $|v_n - 2| = \frac{1}{n^2} = f(n)$ . Donc pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq 23$  on déduit grâce au variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  l'équivalence avec l'inégalité suivante :

$$f(n) \leq f(23)$$

Or  $f(23) = |v_{23} - 2|$  et d'après la question 2., on sait que  $|v_{23} - 2| \leq 10^{-3}$ . Donc à plus forte raison, on obtient pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq 23$  :

$$|v_n - 2| \leq 10^{-3}$$

#### EXERCICE 4

5 points

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définie pour tout entiers naturels  $n$  respectivement par :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n^3}$$

et

$$v_n = \frac{3n^3 + 2}{n^3 + 3}$$

1. Étude de la suite  $(u_n)$ .

- a. On conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

- b. D'après le tableau de valeurs, lorsque l'utilisateur entre la valeur  $p = 3$  la valeur affiché par l'algorithme est :  $n = 10$ .

2. Étude de la suite  $(v_n)$

- a. L'algorithme pour la suite  $(v_n)$  est :

Variables :	$p$ et $n$ sont des entiers naturels. $u$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur $\frac{2}{3}$ .
Traitement :	Tant que $ u - 3  \geq 10^{-p}$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{3n^3 + 2}{n^3 + 3}$
Sortie :	Afficher $n$ .

- b. L'algorithme renvoie pour  $p = 3$  la valeur  $n = 20$ .