

Baccalauréat STI2D SIN

Correction du Examen Blanc 2

du 23 avril 2013

Le sujet comporte 3 exercices et 1 problème. La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

4 points

1. L'algorithme renvoie la valeur u_5 : 1 250

2.	Variables :	n est un entiers naturels. u est un réel.
	Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 000.
	Traitement :	Tant que $n < 5$ u prend la valeur $u \times 1,03$ n prend la valeur $n + 1$
	Sorite :	Afficher u
3.	Variables :	n est un entiers naturels. u est un réel.
	Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 000.
	Traitement :	Tant que $u < 2000$ u prend la valeur $u \times 1,03$ n prend la valeur $n + 1$
	Sorite :	Afficher n

4. Pour trouver la réponse à la question précédente, on résout l'inéquation :
 $u_n > 2000$

$$\begin{aligned}
 u_n > 2000 &\Leftrightarrow 1000 \times 1,03^n > 2000 \\
 &\Leftrightarrow 1,03^n > 2 \\
 &\Leftrightarrow \ln(1,03^n) > \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow n \ln(1,03) > \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \simeq 23,5$.

Donc il faudra 24 ans pour que la somme atteigne 2000.

Et $u_{24} \simeq 2032,8$.

EXERCICE 2

4 points

1. a.

$$f(R) = 20 \frac{\ln(10R)}{\ln(10)} = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10R).$$

On utilise la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$$f'(R) = \frac{20}{\ln(10)} \frac{10}{10R} = \frac{20}{\ln(10) \times R}$$

- b. Pour trouver la signe de la dérivée, on résout l'inéquation $f'(R) > 0$.

$$\begin{aligned}
 f'(R) > 0 &\Leftrightarrow \frac{20}{\ln(10) \times R} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{R} > 0
 \end{aligned}$$

La fonction $R \mapsto \frac{1}{R} > 0$ est toujours positive lorsque $R \in [0, 1 ; 1]$.

Donc la fonction dérivée $R \mapsto f'(R)$ est toujours positive sur $[0, 1 ; 1]$.

R	0.1	1
$f'(R)$	+	
$f(R)$	0	20

c.

2. L'énoncé précise : *L'objectif est de déterminer la rugosité R_0 exprimé en micromètre (μm) correspondant à un numéro de Charmille égal à 15.* Le problème revient à résoudre l'équation $f(R) = 15$.

D'après le tableau des valeurs de la fonction f , on donne un encadrement de R_0 :

$$0,5 \leq R_0 \leq 0,6.$$

Donc pour obtenir un numéro de Charmille égale à 15, il faut que la rugosité soit comprise entre 0,5 et 0,6 μm .

3. On résout l'équation $f(R) = 15$:

$$\begin{aligned}
 f(R) = 15 &\Leftrightarrow 20 \times \log(10 \times R) = 15 \\
 &\Leftrightarrow \log(10 \times R) = \frac{15}{20} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10R)}{\ln(10)} = \frac{3}{4} \\
 &\Leftrightarrow \ln(10R) = \frac{3\ln(10)}{4} \\
 &\Leftrightarrow e^{\ln(10R)} = e^{\frac{3\ln(10)}{4}} \\
 &\Leftrightarrow R = \frac{e^{\frac{3\ln(10)}{4}}}{10}
 \end{aligned}$$

A la calculatrice une approximation de R est : $R \approx 0,562$

Donc pour obtenir un numéro de Charmille égale à 15, il faut que la rugosité d'environ 0,562 μm .

Formulaire : On rappelle que pour tout nombre réel x strictement positif
 $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$

EXERCICE 3

4 points

1. Soit x un nombre réel, dérivons la fonction F :

$$F'(x) = -1e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x} = f(x).$$

2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 2.

On note $A(a)$ l'aire exprimée en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = a$.

$$\begin{aligned}
 A(a) &= \int_2^a f(x) dx \\
 &= [F(x)]_2^a \\
 \text{a.} \quad &= F(a) - F(2) \\
 &= (1-a)e^{-a} - (1-2)e^{-2} \\
 &= e^{-a} - ae^{-a} + e^{-2}.
 \end{aligned}$$

- b. Pour déterminer cette limite, on utilise la formule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$$\text{D'où on déduit que : } \lim_{a \rightarrow +\infty} ae^{-a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} = 0.$$

Donc on conclut que :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = e^{-2}.$$

PROBLÈME**8 points****PARTIE A**

1. L'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies sur \mathbb{R} par :

$$y(x) = \lambda e^{-45x} + \frac{500}{45} = \lambda e^{-45x} + \frac{100}{9}$$

avec λ une constante réelle.

2. Résolvons l'équation en $\lambda y(0) = 9$:

$$\begin{aligned} y(0) = 9 &\Leftrightarrow \lambda e^{-45 \times 0} + \frac{100}{9} = 9 \\ &\Leftrightarrow \lambda e^0 = 9 - \frac{100}{9} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{19}{9} \end{aligned}$$

Donc l'unique solution de l'équation différentielle (E) est la fonction y définie que \mathbb{R} par :

$$y(t) = -\frac{19}{9}e^{-45t} + \frac{100}{9}$$

PARTIE B

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} \\ &= 220 u'(t) \\ \text{1.} &= 220 \times 10^{-6} \times 20\sqrt{2} \times 200 \times 10^{-6} \cos(200\pi t) \\ &= 0,44\sqrt{2} \cos(200\pi t) \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient :

$$i(t) = 0,44\sqrt{2} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

3. On rappelle la notation complexe pour des courants et des intensités suivant des fonctions de la forme :

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \text{ et } i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi')$$

$$\text{sont } \underline{U} = U\sqrt{2}e^{j\varphi} \text{ et } \underline{I} = I\sqrt{2}e^{j\varphi'}.$$

On rappelle enfin que l'impédance noté \underline{Z} est donnée par la formule :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

- a. D'après les formules rappelés ici, on a :

$$\underline{U} = U\sqrt{2}e^{j\varphi} = 20\sqrt{2}e^{j \times 0} = 20\sqrt{2}$$

et :

$$\underline{I} = 0,44\sqrt{2}e^{j\varphi'} = 0,44\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = 0,44\sqrt{2}j$$

On calcul alors l'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20\sqrt{2}e^0}{0,44\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{500}{11}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

- b.

$$\underline{Z} = \frac{500}{11}e^{-j} = -j\frac{500}{11}.$$

- c.

$$|\underline{Z}| = \left| -j\frac{500}{11} \right| = \frac{500}{11}.$$

PARTIE C

1. Déterminer la probabilité que la durée d'un condensateur prélevé au hasard dans la production soit :

a. inférieur à 3000 h.

$$P(T \leq 3000) = 1 - e^{-0,0004 \times 3000} = 1 - e^{-1,2} \approx 0,698.$$

b. supérieur à 2500 h.

$$P(T \geq 2500) = 1 - P(T \leq 2500) = 1 - (1 - e^{-0,0004 \times 2500}) = e^{-1} \approx 0,368$$

2. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0004} = 2500.$$

3. Le problème revient à chercher un réel t strictement positif vérifiant :

$$P(T \leq t) = 0,66.$$

Réolvons cette équation :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) = 0,66 & \iff 1 - e^{-0,0004t} = 0,66 \\ & \iff -e^{-0,0004t} = -0,34 \\ & \iff e^{-0,0004t} = 0,34 \\ & \iff -0,0004t = \ln(0,34) \\ & \iff t = -\frac{\ln(0,34)}{0,0004} \end{aligned}$$

Donc au finale pour $P(T \leq t) = 0,66$ on trouve $t \approx 2697$.

Il faudra donc changer le condensateur avant la 2697^{ème} heure de fonctionnement.

PARTIE D

1. a.

$$P(X \leq 210) = 0,5 - P(210 \leq X \leq 220) \approx 0,5 - 0,298 \approx 0,202$$

b.

$$P(X \geq 215) = 0,5 + P(215 \leq X \leq 220) \approx 0,5 + 0,162 \approx 0,662$$

2. a. Un intervalle contenant 68% des condensateurs est donné par $[m - \sigma ; m + \sigma]$. Donc l'intervalle est :

$$I_{68} = [220 - 12 ; 220 + 12] = [208 ; 232].$$

- b. Un intervalle contenant 95% des condensateurs est donné par $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$. Donc l'intervalle est :

$$I_{95} = [220 - 2 \times 12 ; 220 + 2 \times 12] = [196 ; 244].$$