

📖 Activité introductive : On possède 20 000€, on les place sur un compte à 4% d'intérêt par ans. Dans combien de temps pourrais-je me payer un appartement d'une valeur de 100 000€ ?

👉 La situation est représentée par une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 0,04 u_n \\ u_0 = 20\,000 \end{cases}.$$

u_n représente le montant sur le compte à l'année n .

💻 Une première réponse consiste à faire un algorithme :

u est un nombre réel n un entier naturel u prend la valeur 20 000 tant que $u < 100\,000$ u prend la valeur $u + 0.04u$ fin tant que renvoyer n

L'algorithme nous renvoie la réponse : 42.

Il faudra donc 42 années pour que le compte atteigne la somme de 100 000.☑

I. Définition et propriété

📖 **Définition** : Soit une suite de nombre réel (u_n) , on dit que la suite (u_n) est géométrique si son terme général u_n s'exprime pour tout entier naturel n par récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = q u_n \\ u_0 \end{cases}$$

q est la raison de la suite géométrique.

u_0 son premier terme.

Remarque : On multiplie toujours par la même « chose » la raison q .

👉 On remarque que notre suite (u_n) est géométrique, car on peut l'écrire :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,04 u_n \\ u_0 = 20\,000 \end{cases}.$$

20 000 est le premier terme et

1,04 est la raison de la suite (u_n) .

📖 **Propriété** : La suite géométrique (u_n) s'exprime pour tout entier naturel n par :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Remarque : u_n est u_0 multiplier n fois par q .

👉 On peut alors écrire notre suite (u_n) comme : $u_n = 20\,000 \times 1,04^n$.

La deuxième façon de résoudre le problème est l'inéquation : $u_n > 100\,000$, successivement équivalente à :

$$20\,000 \times 1,04^n > 100\,000$$

$$1,04^n > \frac{100\,000}{20\,000}$$

$$\ln(1,04^n) > \ln 5$$

$$n \ln(1,04) > \ln 5$$

$$n > \frac{\ln 5}{\ln 1,04} \simeq 41.03540661$$

n étant un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$), on choisi $n = 42$, ce qui confirme la réponse déjà obtenu avec l'algorithme.☑

📌 Activité : On souhaite parcourir Marseille – Montpellier, en parcourant chaque jours la moitié de la distance qui nous sépare de Montpellier. Dans combien de jours arriverons nous à Montpellier ?

☞ Une réponse intuitive est de dire que nous n'arriverons jamais à Montpellier.

Modélisons notre problème par un segment de longueur 1 (On définit ici une nouvelle unité « 1 Marseille – Montpellier »).

AB=1



On définit ainsi une suite géométrique (u_n) représentant la distance parcourue le $n^{\text{ième}}$ jour par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \text{ou par : } u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour déterminer la distance totale parcourue le $n^{\text{ième}}$ jour, il faut alors sommer les termes de la suite de u_1 à u_n : définissons la suite somme (S_n) par :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

II. Somme des termes d'une suite géométrique.

📌 Théorème : Soit une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 . La somme des termes de la suite géométrique (ou série géométrique) est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Nombre de termes

☞ Notre suite (S_n) se calcul alors :

1^{er} terme

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

III. Limite de suite géométrique.

📌 Théorème : Soit une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 ,

$$\text{Si } q > 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\text{Si } q = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$$

$$\text{Si } 0 < q < 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

☞ La limite de la suite (S_n) se calcul :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1, \quad \text{car d'après le théorème } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

On conclut donc que nous n'atteindrons jamais la ville de Montpellier (« sauf à l'infini »). ☑

Exercice : Une population de bactéries compte 1000 individus, elle double de population chaque jour. Dans combien de jours comptera-t-elle plus de 1 millions d'individus ?

☞ Une fois de plus une première réponse consiste à faire un algorithme :

u est un nombre réel
 n un entier naturel
 u prend la valeur 1 000
 tant que $u < 1\,000\,000$
 u prend la valeur $2 \times u$
 fin tant que
 renvoyer n

L'algorithme nous renvoie la réponse : 10.

Il faudra donc 10 jours pour que la population de bactérie dépasse le million d'individus. ☑

☞ On modélise ce problème par une suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1\,000 \end{cases}, \quad \text{pouvant également s'écrire : } u_n = 1000 \times 2^n.$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation : $u_n > 10^6$, successivement équivalente à :

$$1000 \times 2^n > 10^6$$

$$2^n > \frac{10^6}{1000}$$

$$2^n > 10^3$$

$$\ln 2^n > \ln(10^3)$$

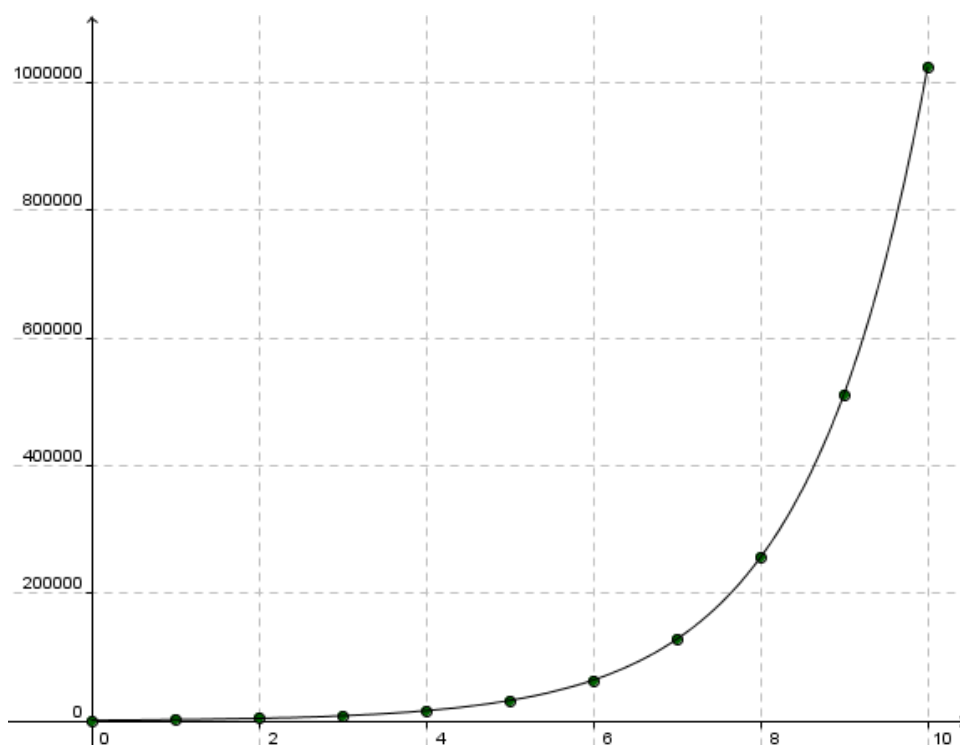
$$n \ln 2 > 3 \ln 10$$

$$n > \frac{3 \ln 10}{\ln 2} \approx 9,97.$$

Ceci confirme bien le résultat obtenu avec l'algorithme : il faudra 10 jours pour que la population de bactérie dépasse le million d'individus. ☑

On trouve que $u_{10} = 1\,024\,000$ individus.

Si on représente la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par : $f(x) = 1000 \times 2^x$, on obtient le graphique :



Cette fonction représente une croissance exponentielle.