

# I. Variable aléatoire continue

**Définition** : Une variable aléatoire réelle à densité (ou continue) est une application définie sur un ensemble  $\Omega$  et prenant les valeurs d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Exemple** : Ainsi on peut dire que la fonction  $Rand()$  de la calculatrice ou la fonction  $alea()$ , suit la loi uniforme sur  $[0 ; 1]$ . Elle renvoie de façon aléatoire un nombre dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

**Définition** : Soit  $f$  une fonction continue est positive sur un intervalle  $I = [a ; b]$  telle que :

$$\int_a^b f(t)dt = 1.$$

On dit que  $X$  est une **variable aléatoire réelle continue** de densité  $f$  si pour tout  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  avec  $x_1 \leq x_2$  :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

On définit ici une loi de probabilité  $P$  continue sur  $I$ , et  $f$  est appelée **densité de probabilité** de  $P$  sur  $I$ .

**Exemple** : La fonction de densité de la loi uniforme sur  $[0 ; 1]$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = 1$ .

Ainsi,

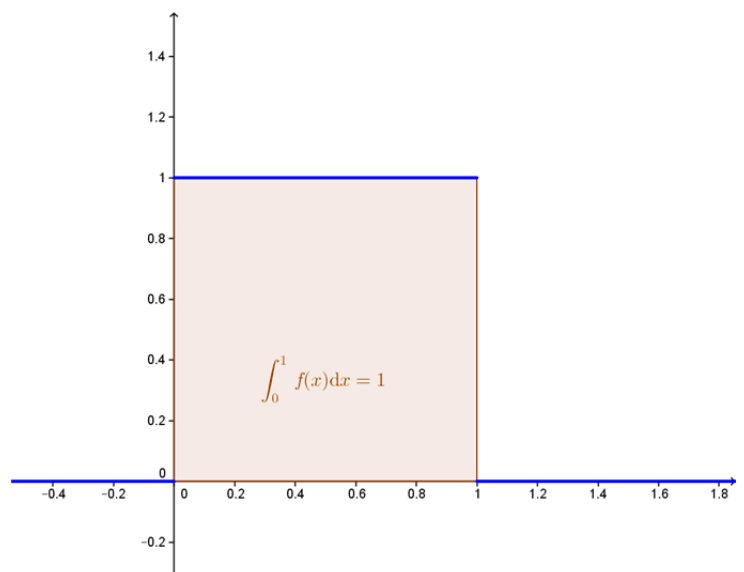
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

C'est l'aire du carré de côté 1.

Donc on définit bien une loi de probabilité.

Exercices :

- Programmer un algorithme qui simule une loi uniforme sur :  $[0 ; 2]$ ,  $[0 ; 3]$ , sur  $[0 ; a]$ .
- Ecrire un algorithme simulant la loi uniforme sur  $[1 ; 3]$ , sur  $[4 ; 6]$  et sur  $[a ; b]$ .
- Imaginons que l'on choisisse un point au hasard dans le carré de côté 1.  
Ecrire un algorithme permettant de simuler une telle expérience en renvoyant les coordonnées des points en questions.



## II. Loi uniforme sur $[a ; b]$ .

**Définition** : Soit  $[a ; b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (avec  $a \neq b$ ).

Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi uniforme sur  $[a ; b]$**  si, pour tout intervalle  $I$  inclus dans  $[a ; b]$ , la probabilité de l'évènement «  $X \in I$  » est l'aire du domaine

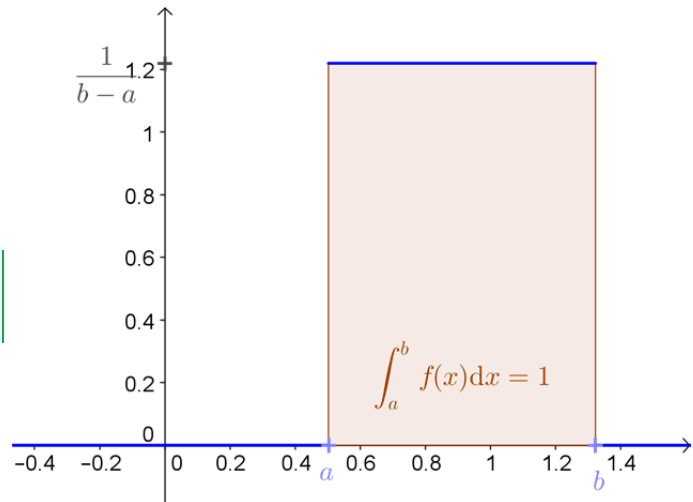
$\{M(x ; y) ; x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ ,  $f$  est la fonction constante définie sur  $[a ; b]$  par  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ .

En particulier, pour tout intervalle  $[c ; d]$  inclus dans  $[a ; b]$ , on a

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx.$$

La fonction  $f$  définie sur  $[a ; b]$  par

$f: x \mapsto \frac{1}{b-a}$  est appelée **fonction de densité de la loi uniforme sur  $[a ; b]$** .



$$P(c \leq X \leq d) = \frac{1}{b-a} \int_c^d 1 dx = \frac{1}{b-a} [x]_c^d = \frac{d-c}{b-a}.$$

**Propriété** : Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $[a ; b]$ , alors

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

**Définition** : Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur  $[a ; b]$ . On appelle **espérance de  $X$**  le réel noté  $E(X)$ , défini par

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx,$$

où  $f: x \mapsto \frac{1}{b-a}$  est la fonction de densité de la loi uniforme sur  $[a , b]$ .

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2} = \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

**Propriété** : L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi uniforme sur  $[a ; b]$  est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

**Définition** : Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur  $[a ; b]$ . On appelle :

\* **Variance de  $X$**  le réel, noté  $V(X)$ , défini par :

$$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

\* **écart-type de  $X$** , le réel noté  $\sigma(X)$ , égale à la racine carrée de la variance de  $X$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \times \frac{2}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \text{d'où : } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

**Propriété** : L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi uniforme sur  $[a ; b]$  est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

### III. Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ .

Dans les problèmes liés à la radioactivité ou au fonctionnement d'un appareil électronique, on est amené à étudier des problèmes de durée de vie sans usure (ou sans vieillissement), on définit ainsi une nouvelle loi de probabilité, la loi exponentielle.

**Définition** : Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

Une variable aléatoire  $T$  à valeur dans  $[0 ; +\infty[$  suit une **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$**  si, pour tout intervalle borné  $I$  inclus dans  $[0 ; +\infty[$ , la probabilité de l'évènement «  $T \in I$  » est l'aire du domaine  $\{M(x; y); x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$  où  $f$  est la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

En particulier, pour tout intervalle  $[\alpha ; \beta]$  inclus dans  $[0 ; +\infty[$ , on a :

$$P(\alpha \leq T \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

La fonction  $f$  définie que  $[0 ; +\infty[$  par  $f: x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$  est appelée **fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$** .

En notant «  $T \leq t$  » l'évènement «  $0 \leq T \leq t$  », on a :

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

**Propriété** : Une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $[0 ; +\infty[$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si et seulement si, pour tout  $t \geq 0$ , on a :  $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

De la même façon que pour la loi uniforme, on définit l'espérance de la loi exponentielle par :

$$E(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x f(x) dx$$

**Propriété** : Si une variable aléatoire  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

