

a. Présentation

Le logiciel Xcas permet également de résoudre des équations différentielles. En utilisant la fonction *desolve*(x, y) (x étant l'équation différentielle munie éventuellement de condition initiale et y la fonction « inconnue » de l'équation).

Ce logiciel permet aussi de calculer la valeur exacte d'une intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \text{int}(f(x), x, a, b)$$

Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = e^x$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 6y = 3$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 7$ avec $y(0) = 0$.
4. Calculer $\int_0^4 (x^2 - x)dx$.

1 `desolve(y'+4y=exp(x),y)`

$$\frac{5 \cdot c_0 e^{-4 \cdot x} + e^x}{5}$$

2 `desolve(y''+3y=3,y)`

$$1 + (c_0 - 1) \cos(\sqrt{3} \cdot x) + c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \cdot x)$$

3 `desolve([y'-3y=7,y(0)=0],y)`

$$\left[\frac{7e^{3 \cdot x} - 7}{3} \right]$$

Les c_0 et c_1 sont les constantes réelles.

4 `int(x^2-x,x,0,4)`

$$\frac{40}{3}$$

b. L'exercice du TP

Dans cet exercice, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = x$, où y désigne une fonction de la variable x .

Question 1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) .

Question 2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) Lorsque $y(0) = \frac{3}{4}$.

On note f la fonction définie que \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}.$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 4 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

Question 3. Limites

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Question 4. Etude de la fonction. On appelle f' la dérivée de la fonction f .

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre l'inéquation $\frac{1}{2} - 2e^{-2x} \geq 0$ et en déduire le tableau de variation de f .
- Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 0.

Soit la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, on appelle \mathcal{D} la droite représentant cette fonction.

Question 5. Représenter la courbe \mathcal{C} ainsi que la droite \mathcal{D} dans un même repère sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

Question 6. Calcul d'aire. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $A(m)$ l'aire, exprimée en cm^2 , de la partie de plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , la droite \mathcal{D} et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = m$.

- Calculer $A(m)$.
- Donner la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.