

I. Limites d'une fonction à l'infini

a. Limites infinies

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$, et dont la courbe représentative \mathcal{C} dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée ci-contre.

1. Calculer $f(10^2)$, $f(10^6)$, $f(10^8)$ et $f(10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase :
« $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ..., dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$). »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ avec a un réel.

On dit que la limites de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$, et l'on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut (voisin de $+\infty$), dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$).

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ avec a un réel.

On dit que la limites de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$, et l'on écrit :

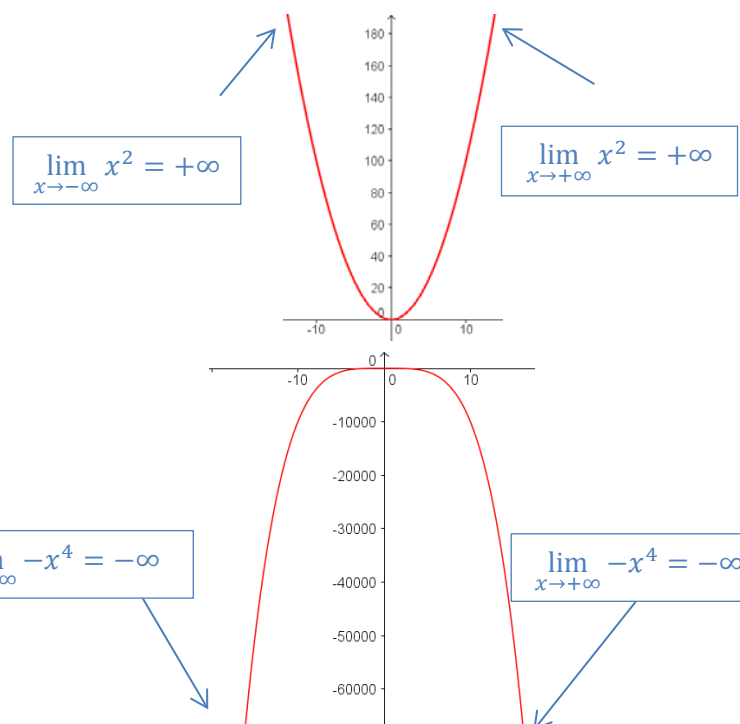
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

lorsque $f(x)$ est aussi petit que l'on veut (voisin de $-\infty$), dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$).

Exemples :

Limites de la fonction carrée en $-\infty$ et en $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.



Soit f la fonction définiesur \mathbb{R} par $f(x) = -x^4$.

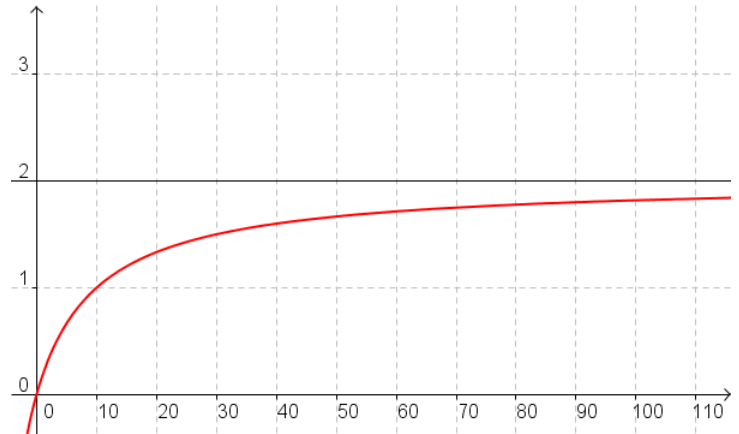
b. Limites finies

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+10},$$

et dont la courbe représentative \mathcal{C} dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée ci-contre.



1. Calculer $f(10^2)$, $f(10^6)$, $f(10^8)$ et $f(10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase :
« $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ..., dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$). »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ℓ un nombre réel.

1) Si $I =]a ; +\infty[$, et si, la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi proche de zéro que l'on veut, dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$) alors on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à ℓ et l'on note :

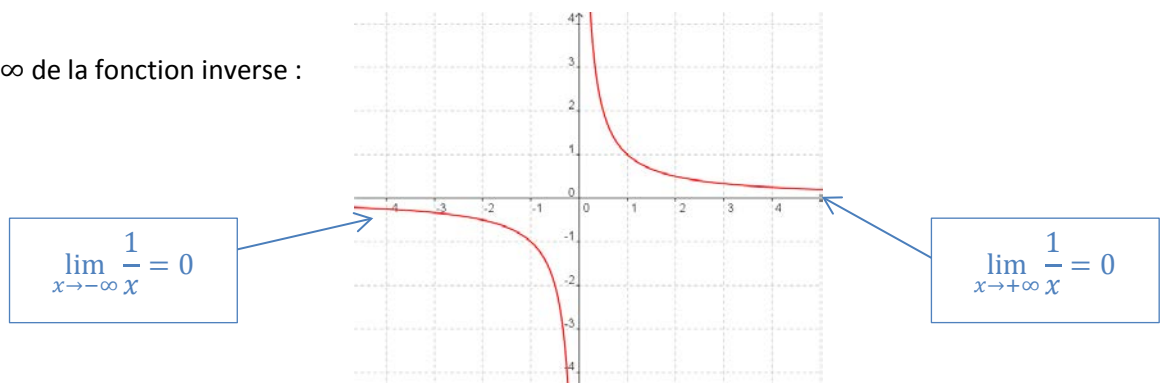
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

2) Si $I =]-\infty ; a[$, et si, la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi proche de zéro que l'on veut, dès que x est assez petit (voisin de $-\infty$) alors on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à ℓ et l'on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Exemple :

Limite en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction inverse :



c. Limite finie et Asymptotes horizontales

Définition (interprétation graphique) : Soient une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ (respectivement $] -\infty ; a[$) avec a un réel et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

Lorsque la fonction f admet pour limite en $+\infty$ (r. en $-\infty$) un réel k ; c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k, \left(\text{r. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \right)$$

On dit que la droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ (r. $-\infty$).

Exemple : La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et $-\infty$. Et la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f de l'activité 2 en $-\infty$.

II. Limite d'une fonction en a

a. Limites infinies

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1},$$

et dont la courbe représentative \mathcal{C} dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée ci-contre.

1. Calculer $f(1,1)$, $f(1,001)$, $f(1 + 10^{-6})$ et $f(1 + 10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase :
« $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ..., dès que x approche 1 par la droite. »
3. Calculer $f(0,9)$, $f(0,999)$, $f(1 - 10^{-6})$ et $f(1 - 10^{10})$.
4. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase :
« $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ..., dès que x approche 1 par la gauche. »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ (ou $[-\infty ; a[$) avec a un réel.

On dit que la limites de f en a est égale à $\pm \infty$, et l'on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty,$$

lorsque $f(x)$ est aussi grand ou petit que l'on veut (voisin de $\pm \infty$), dès que x est suffisamment près de a (voisin de a).

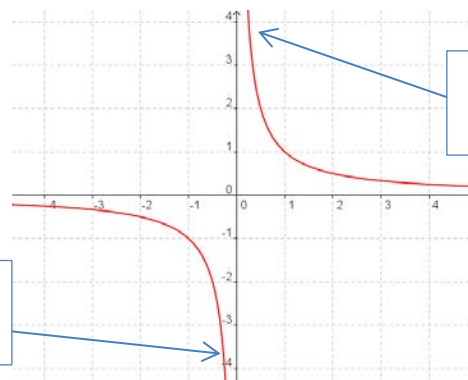
Exemple : Limites de la fonction inverse en 0 :

Remarque :

On distinguera la limite à droite de 0 c'est-à-dire

lorsque $x > 0$ (noté 0^+)

avec la limite à gauche de 0 : $x < 0$ (noté 0^-).



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

b. Limites infinies et asymptotes verticales

Définition (interprétation graphique): Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ (ou $[-\infty ; a[$) avec a un réel et \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

Lorsque la limites de f en a est égale à $\pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

Exemple : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et $-\infty$.

Et la droite $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f de l'activité 3 en $-\infty$.

c. Limites en un point du domaine de définition

Théorème : Soit f une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I . On a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Remarque : Ce théorème nous permet de dire qu'en tout point de l'intervalle I la fonction f est continue.

III. Calcul de limites

a. Limites de références

i. Fonction $x \mapsto x^n$, avec n entier naturel

Théorème : Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

Si n est pair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty.$$

Si n est impair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

ii. Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

iii. Limite de la fonction inverse

Théorème :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0.\end{aligned}$$

b. Opérations sur les limites

i. Produit d'une fonction par une constante

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et k un réel non nul.

- Si $f(x)$ tend vers a , alors $k \times f(x)$ tend vers ka .
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $+\infty$ si k est positif et $-\infty$ si k est négatif.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $-\infty$ si k est positif et $+\infty$ si k est négatif.

Ces résultats sont valables, pour une limite quand x tend vers x_0 appartenant à l'intervalle I , ou une borne de I , ou quand x tend vers $\pm\infty$.

ii. Somme de deux fonctions

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ vers b alors $f(x) + g(x)$ tend vers $a + b$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x) + g(x)$ c'est une forme indéterminée.

iii. Produit de deux fonctions

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers b , alors $f(x) \times g(x)$ tend vers ab .
- Si $f(x)$ tend vers a (avec $a \neq 0$) et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon le signe de a .
- Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon la règle du produit.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x) \times g(x)$ c'est une forme indéterminée.

iv. Puissance d'une fonction

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , n un entier naturel non nul et a un réel.

- Si $u(x)$ tend vers a , alors $u^n(x)$ tend vers a^n .
- Si $u(x)$ tend vers $+\infty$, alors $u^n(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers $-\infty$ et n est pair, alors $u^n(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers $-\infty$ et n est impair, alors $u^n(x)$ tend vers $-\infty$.

v. Inverse d'une fonction

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que u ne s'annule pas sur I .

- Si $u(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers 0.
- Si $u(x)$ tend vers un réel a non nul, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $\frac{1}{a}$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et est strictement positif sur I , alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et strictement négatif sur I , alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $-\infty$.

Exemple : Limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$:

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie est positive sur $[0 ; +\infty[$, sa limite en 0 est 0.

On déduit du théorème précédent : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

vi. Limites des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, avec n entier naturel

Théorème :

Limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

Limites en 0 :

- Si n est pair :

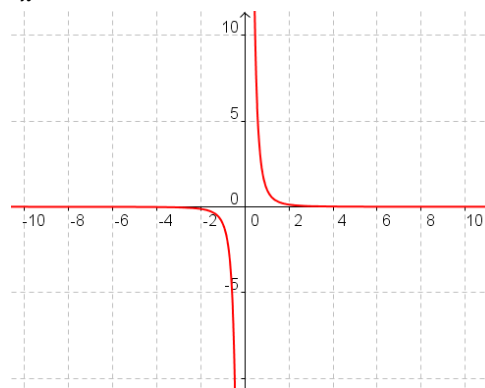
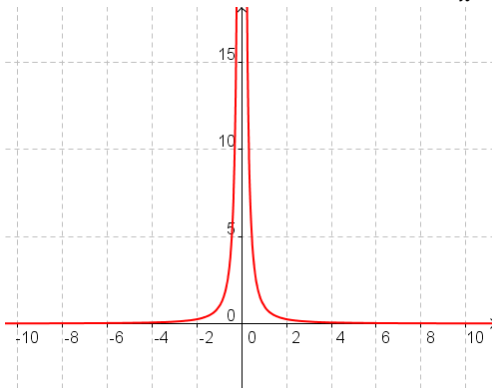
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

- Si n est impair :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

Exemples : Représentation des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$:



vii. Quotient de deux fonctions

Théorème : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} telles que g ne s'annule pas sur I .

- Si $f(x)$ tend vers un réel a et $g(x)$ vers un réel b non nul, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\frac{a}{b}$.
- Si $f(x)$ tend vers un réel a et $g(x)$ vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0.
- Si $f(x)$ tend vers un réel a non nul et $g(x)$ tend vers 0, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Selon le signe de a et de $g(x)$

Exemple : Soit la fonction u définie sur $I =]-\infty ; 3[$ par $u(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

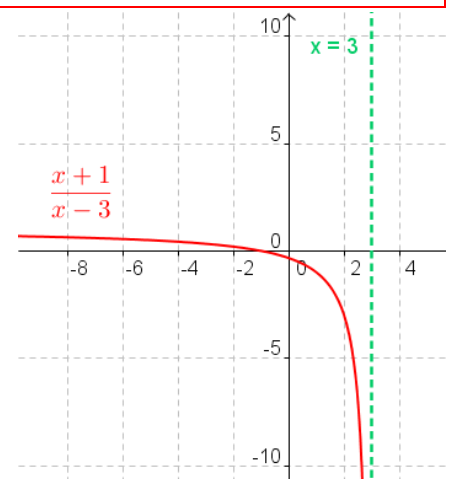
On cherche la limite de $u(x)$ quand x tend vers 3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0.$$

Donc la fonction $x \mapsto x+1$ tend vers 4 qui est strictement positif et la fonction $x \mapsto x-3$ est négative sur I , donc d'après le théorème précédents :

$$\lim_{x \rightarrow 3} u(x) = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de u .



IV. Résumer

a. Limites et asymptotes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ La droite d'équation $x = a$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en a .

b. Limites de références

n est un entier naturel non nul

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

Si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

Si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est pair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Si n est impair, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

c. Opérations sur les limites

x tend vers un nombre réel, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, a et b sont deux nombres réels

i. Somme

$f(x)$ tend vers	a			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$ tend vers	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x) + g(x)$ tend vers	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

ii. Produit

$f(x)$ tend vers	a	$a \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$g(x)$ tend vers	b	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$f(x) \times g(x)$ tend vers	$a \times b$	$\pm\infty$ suivant les règles du signe		Forme indéterminée

iii. Quotient

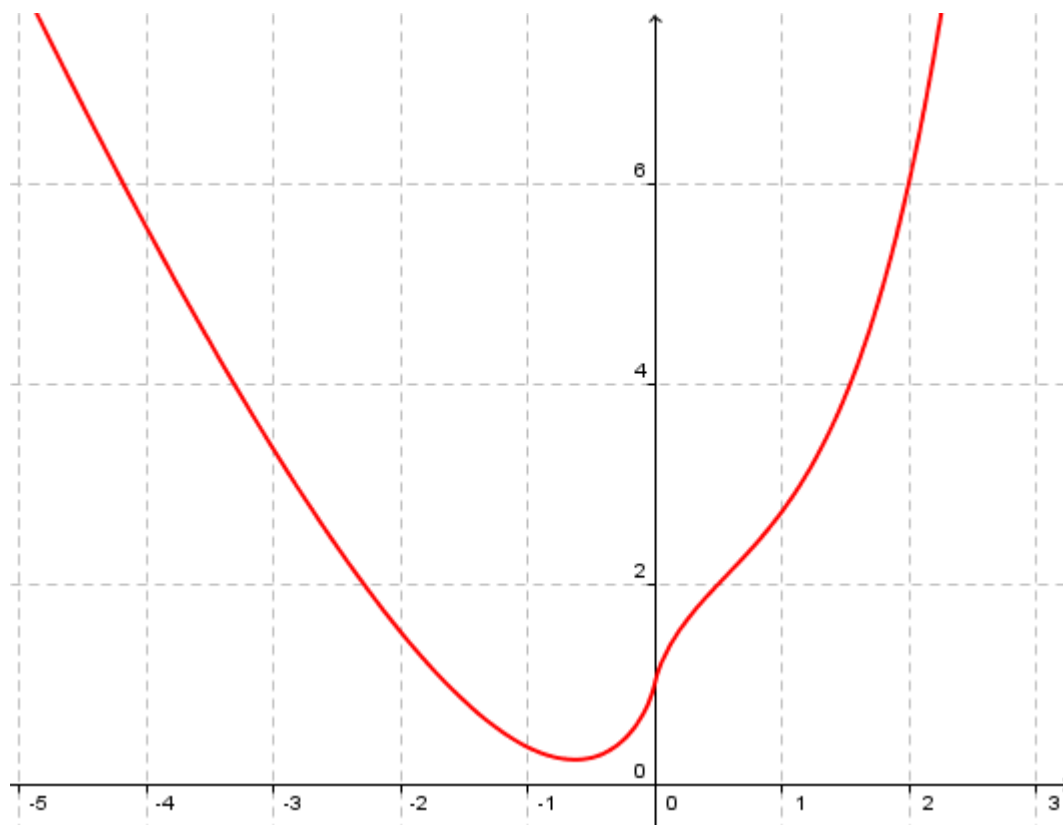
$f(x)$ tend vers	a		$a \neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$g(x)$ tend vers	$b \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
$f(x) \times g(x)$ tend vers	$\frac{a}{b}$	0	$\pm\infty$ suivant les règles du signe	Forme indéterminée	

V. Exercices

I. Limites d'une fonction à l'infini

a. Limites infinies

Exercice 1



Conjecturer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction représentée graphiquement ci-dessus.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f .
2.
 - a. Sur la calculatrice, faire un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir 0 avec un pas de 10.
 - b. En déduire un réel x à partir duquel $f(x) > 10^4$.
 - c. En modifiant le pas du tableau, déterminer un réel x à partir duquel $f(x) > 10^6$.
 - d. Énoncer une conjecture sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3.
 - a. Soit k un entier naturel. Résoudre l'équation $x^2 - x = 10^k$.
Justifier qu'il existe une valeur de x (que l'on exprimera en fonction de k) à partir de laquelle $f(x) > 10^k$.
 - b. Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{100-x^2}{x}$.

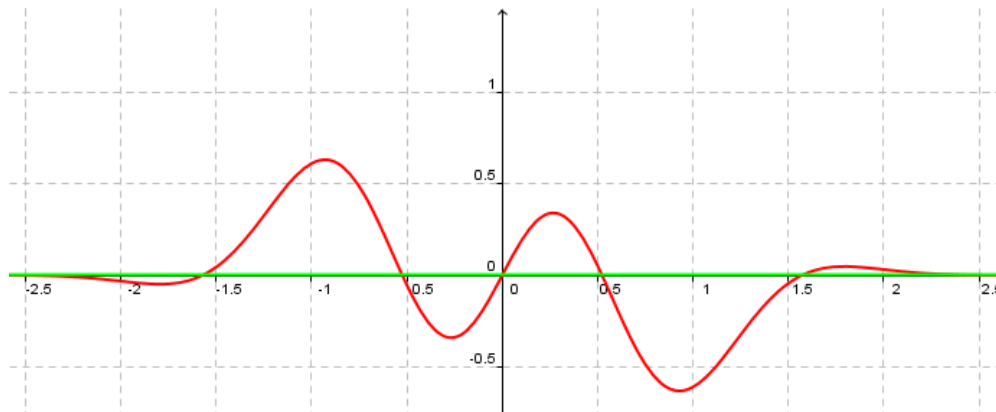
1. Calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f .
2.
 - a. Sur la calculatrice, obtenir un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de 0 avec un pas de 100.
 - b. En déduire un réel x à partir duquel $f(x) < -10^3$.
 - c. En modifiant le pas du tableau, déterminer un réel x à partir duquel $f(x) < -10^5$.
 - d. Énoncer une conjecture sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3.
 - a. Soit k un entier naturel. Résoudre l'équation $\frac{100-x^2}{x} = -10^k$.
Justifier qu'il existe une valeur de x (que l'on exprimera en fonction de k) à partir de laquelle $f(x) < -10^k$.
 - b. Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$?

b. Limites finies

c. Limite finie et Asymptotes horizontales

Exercice 1

- a. On donne la représentation graphique d'une fonction f , quelle semble être la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$? Quelle est l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$?



- b. On donne les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2.$$
 Donner une interprétation graphique de chaque limite.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}.$$

1. À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice (on pourra par exemple utiliser un pas de 10), énoncer une conjecture sur la limite éventuelle de f en $+\infty$. Cette conjecture se retrouve-t-elle sur la représentation graphique de f ?
2.
 - a. Montrer que, pour tout x de $]1 ; +\infty[$,

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{1-x}.$$
 - b. Résoudre dans $]1 ; +\infty[$ l'inéquation $\frac{1}{x-1} < 10^{-2}$. En déduire un seuil x_2 à partir duquel $|f(x) - 2| < 10^{-2}$.
 - c. Soit p un entier naturel. Résoudre dans $]1 ; +\infty[$ l'inéquation $\frac{1}{x-1} < 10^{-p}$.

- En déduire un seuil x_p à partir duquel $|f(x) - 2| < 10^{-p}$.
d. Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x-11}{x-3}$.

1. À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, énoncer une conjecture sur la limite éventuelle de f en $+\infty$. Cette conjecture se retrouve-t-elle sur la représentation graphique de f ?
2. a. Montrer que, pour tout x de $]3 ; +\infty[$, $|f(x) - 5| = \frac{4}{x-3}$.
b. Résoudre dans $]3 ; +\infty[$ l'inéquation $\frac{4}{x-3} < 10^{-5}$.
En déduire un seuil x_5 à partir duquel $|f(x) - 5| < 10^{-5}$.
c. Soit p un entier naturel. Résoudre dans $]3 ; +\infty[$ l'inéquation $\frac{4}{x-3} < 10^{-p}$.
d. Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$?