

~ Révision du devoir surveillé 3 ~  
21 janvier 2013

**EXERCICE 1**

**4 points**

*Le nénuphar*

**Dans cette exercice toute trace d'étude ou de recherche même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.**

Dans un terrarium, un serpent mesure  $\frac{1}{50}$  de la taille du terrarium. Chaque mois, sa taille double. Dans combien de mois le terrarium sera trop petit pour héberger le nénuphar ?

**Exercice 2**

**4 points**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a.  $e^{7x-1} = e^{3x+3}$

b.  $e^{7x-1} > 13$ .

2. Sans justification répondre aux questions suivantes :

a. Donner la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{4x^2+1} - x^2.$$

b. Donner une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 3e^{7x-1}.$$

c. Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$h(x) = 3e^{2x-1} + \frac{1}{x^2}.$$

Déterminer les limites suivantes :

i.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

**Exercice 3**

**4 points**

1. Résoudre l'équation  $X^2 - 4X - 12 = 0$

2. On souhaite résoudre l'équation (E) :  $e^{2x} - 4e^x - 12 = 0$ . Pour cela on pose  $X = e^x$ .

a. Vérifier que l'équation (E) s'écrit sous la forme (E') :  $aX^2 + bX + c = 0$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels qu'on précisera.

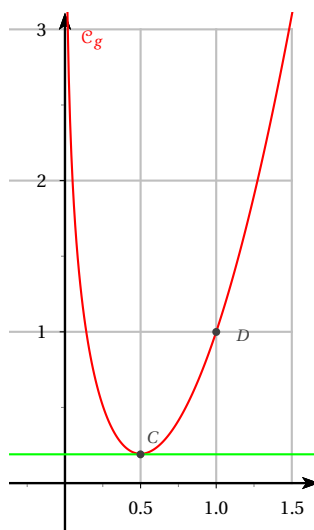
b. Résoudre alors l'équation (E').

c. Résoudre les équations  $e^x = 6$  et  $e^x = -2$ .

d. en déduire les solutions de l'équation (E).

**Problème****8 points**

**Partie A :** La courbe  $\mathcal{C}_g$  ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . Cette courbe passe par le point  $A(1 ; 3)$  et sa tangente au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  est parallèle à l'axe des abscisses.



1.
  - a. À partir des informations sur  $\mathcal{C}_g$ , donner les valeurs de  $g(1)$  et  $g'(\frac{1}{2})$ .
  - b. Par lecture graphique, faire une conjecture sur le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. On admet que la fonction  $g$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = a + b \ln(x) + 2x^2$ . En utilisant les résultats de 1.a., déterminer  $a$  et  $b$ . Dans la suite, on admet que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) = -1 - \ln(x) + 2x^2$ .
3.
  - a. Calculer  $g'(x)$ , puis étudier son signe pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Dresser les tableaux de variation de  $g$  (on ne demande pas les limites aux bornes de l'intervalle de définition).
  - c. Justifier alors la conjecture émise à la question 1.b.

**Partie B :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 2}{x} + 2x.$$

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphique 5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition. En donner une interprétation graphique s'il y a lieu.
2. On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
3.
  - a. À l'aide de vos résultats de la **Partie A**, en déduire le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4.
  - a. Calculer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
  - b. Construire la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisses 1, puis construire  $\mathcal{C}_f$ .