

## I. Définition

**Définition** : On appelle fonction logarithme népérien, l'unique fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , ayant pour fonction dérivée la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et vérifiant, pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $f(ab) = f(a) + f(b)$ .  
La fonction logarithme népérien est notée  $\ln$ .

## II. Propriétés algébriques

### a. Produit

**Propriété** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Exemples :  $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$        $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \times 5) = \ln 10$

Exercice : Calculer la valeur de  $\ln(1)$  en appliquant la relation précédente.

$$\begin{aligned}\ln(1 \times 1) &= \ln(1) + \ln(1) \\ \Leftrightarrow \ln(1) &= 2 \ln(1) \\ \Leftrightarrow \ln(1) &= 0.\end{aligned}$$

### b. Inverse et quotient

**Propriété** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$  et  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ .

### c. Puissance et racine carrée

**Propriété** : Pour tout réel  $a$  strictement positif et tout entier relatif  $n$ ,

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a.$$

Exercices : En utilisant les propriétés précédentes, résoudre les équations et inéquation suivantes :

$$\begin{aligned}\ln(4x + 1) &= 0 \\ \ln(6 - x) &= 2 \\ \ln(2^x) &= 1 \\ 3^x &= 10 \\ 2^n &= 1024 \\ \ln(2x + 1) &> \ln(7 - x) \\ \ln(5x - 2) &< 0.\end{aligned}$$

## III. Etude de la fonction logarithme népérien

### a. Ensemble de définition

Conséquence de la définition, la fonction  $\ln$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$ .

### b. Fonction dérivée et sens de variation

**Propriété** : La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

Sa fonction dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

**Propriété** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

### c. Limites

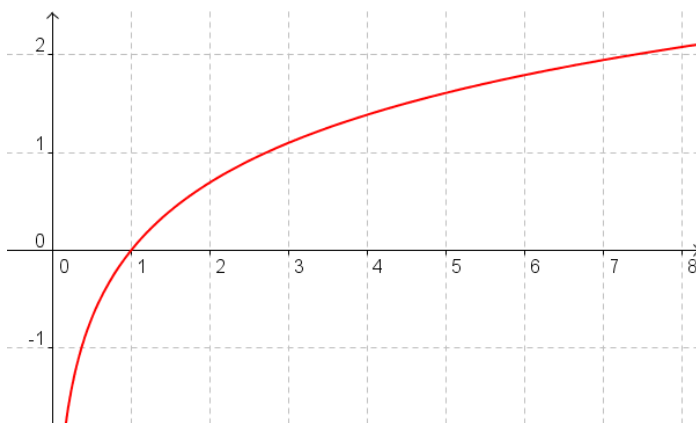
**Propriété** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

### d. Tableau de variation et courbe représentative

Dans le tableau de variation, on note  $f$  la fonction  $\ln$  et  $f'$  sa dérivée.

$x$	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



Exercice : Etude de la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x) + 2x$

1. Déterminer les limites en 0 et en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .
2. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
3. Dresser le tableau de variation de cette fonction.

### e. Le nombre $e$ .

**Propriété** : Il existe un unique réel, noté  $e$  tel que  $\ln e = 1$

### f. Egalité et inégalités

**Propriété** : Pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $\ln x < 0$  et pour tout  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$ .

**Propriété** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln a = \ln b$  si et seulement si  $a = b$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln a < \ln b$  si et seulement si  $a < b$ .

## IV. Application de fonction $\ln$ .

### a. Dérivée

**Propriété** : Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $u(x) > 0$ .

La fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \ln(u(x))$  est alors dérivable sur  $I$  et  $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

## b. Limites

**Propriété** : Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $u(x) > 0$ .

On désigne par  $a$  un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

– Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = -\infty$

– Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = +\infty$

– Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  avec  $b$  réel strictement positif, alors  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = \ln b$

## V. Primitives

### a. Primitives de la fonction inverse

**Propriété** : Les primitives sur  $]0 ; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sont les fonctions  $x \mapsto \ln x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

### b. Primitives de la forme $\frac{u'}{u}$

**Propriété** : Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $u(x) > 0$ .

Les primitives de la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  sont les fonctions de la forme  $F(x) = \ln(u(x)) + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

Exemple : On cherche les primitives de la fonction  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ .

On remarque que  $f(x)$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  où  $u$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par  $u(x) = x^2 + 3$ .

De plus pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 + 3 > 0$  donc, d'après la propriété précédente, les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $F$  de la forme  $F(x) = \ln(x^2 + 3) + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

Exercices : Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  ;  $\mathcal{D}_f = ]-\infty ; -2[ \cup ]-2 ; +\infty[$  ;

2.  $g(x) = \frac{2}{2x+1}$  ;  $\mathcal{D}_g = ]-\infty ; -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2} ; +\infty[$  ;

3.  $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$  ;  $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$  ;

4.  $i(x) = \frac{1}{3x-1}$  ;  $\mathcal{D}_g = ]-\infty ; \frac{1}{3}[ \cup ]\frac{1}{3} ; +\infty[$  ;

5.  $j(x) = \frac{3x^2}{x^3-10}$  ;  $\mathcal{D}_g = ]-\infty ; \sqrt[3]{10}[ \cup ]\sqrt[3]{10} ; +\infty[$

## VI. Croissance comparée

**Propriété** : Pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$