

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Loi exponentielle

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Loi normale :

X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ .

Les intervalles 1,2 ou 3 sigmas :

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \simeq 0,68$$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \simeq 0,95$$

$$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \simeq 0,997$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale :

Soit X une loi binomiale de paramètre n (le nombre de répétition de l'expérience) et p (la probabilité du succès)

Lorsque $n \geq 25$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on peut approcher la loi binomiale par une loi normale d'espérance $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% :

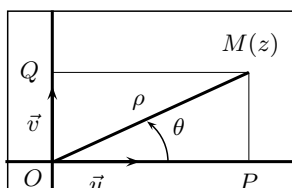
$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

II. ALGÈBRE

A. Nombres complexes

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

$$x = \Re(z) = \rho \cos \theta$$

$$y = \Im(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta}) (\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

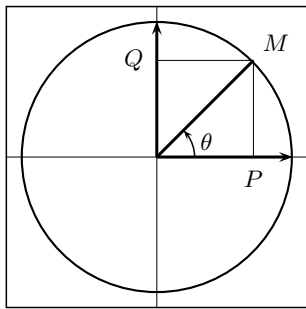
B. Identités remarquables

(valables sur \mathbb{C} et donc sur \mathbb{R})

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad ; \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. Trigonométrie



$$OP = |\cos \theta|$$

$$OQ = |\sin \theta|$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

D. Équations du second degré

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, pas de solution réelle.

Lorsque $\Delta \geq 0$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0 q^n$

$$\text{Si } q \neq 1, \quad S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{Si } q = 1, \quad S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\begin{array}{lll} \ln 1 = 0 & \text{Si } x \in]-\infty ; +\infty[\text{ et } y \in]0 ; +\infty[, & e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \\ \ln e = 1 & y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y & a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0) \\ \ln(ab) = \ln a + \ln b & y > \exp x = e^x \text{ équivaut à } \ln y > x & (e^a)^b = e^{ab} \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b & e^0 = 1 & \ln a^x = x \ln a \\ & e^{a+b} = e^a e^b & \end{array}$$

2. Fonctions puissances

$$\begin{array}{lll} x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0) & x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta & (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \\ x^0 = 1 & x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} & \text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0; +\infty[\text{ et } y \in [0; +\infty[\\ & & y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n \end{array}$$

B. Limites usuelles des fonctions

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array}$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \text{ et si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 \text{ et si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

2. Suites

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty \quad ; \quad \text{Si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

Limites de suites(Algorithmes!)

On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ lorsque pour tout entier naturel p il existe N un seuil à partir duquel (tel que pour tout $n \geq N$) $u_n > 10^p$.

On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ lorsque pour tout entier naturel p il existe N un seuil à partir duquel (tel que pour tout $n \geq N$) $|u_n - l| < 10^{-p}$.

C. *Dérivées et primitives* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles		
f(x)	f'(x)	Intervalle de validité
k	0	$] - \infty, +\infty[$
x	1	$] - \infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$] - \infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] - \infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] - \infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$] 0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0, +\infty[$
e^x	e^x	$] - \infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] - \infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] - \infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$$

$$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$$

D. *Calcul intégral*

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

$$\int_b^a f(t) \, dt = - \int_a^b f(t) \, dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) \, dt \geq 0$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt$$

E. *Équations différentielles*

Équations	Solutions sur intervalle $] - \infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$