

# MATHS

**T**<sup>erm</sup> **STI2D**  
**STL**

## Livre du professeur

**Agnès Excellent-Savart**

**Mathieu Hibou**

**Cécile Redon**


**Éric Sorosina**

**Jean-François Liébaut**

**Frédéric Xerri**

**hachette**  
ÉDUCATION

## En complément

Les fichiers signalés par  sont disponibles en téléchargement pour les enseignants sur le site [hachette-education.com](http://hachette-education.com).

Réalisation : Lasergraphie

**[www.hachette-education.com](http://www.hachette-education.com)**

© HACHETTE LIVRE 2012, 43 quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15

ISBN : 978-2-01-182120-1

*Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.*

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.



Cet ouvrage est imprimé sur du papier  
composé de fibres naturelles, renouvelables,  
recyclables, et fabriqué à partir de bois issu de forêts  
gérées de façon durable conformément  
à l'article 206 de la loi n° 2010-788  
du 12 juillet 2010.

# Sommaire

<b>1</b>	Suites	5
<b>2</b>	Limites	20
<b>3</b>	Dérivées et primitives	34
<b>4</b>	Fonctions logarithmes	49
<b>5</b>	Fonction exponentielle	68
<b>6</b>	Intégration	84
<b>7</b>	Équations différentielles	100
<b>8</b>	Nombres complexes	116
<b>9</b>	Exemples de lois à densité	135
<b>10</b>	Prise de décision et estimation	145
<b>11</b>	Statistiques à deux variables	154
	Mémento	164






## Suites

## Activités

## Activité 1 Des écureuils

Dans cette activité, on modélise l'évolution de deux populations d'écureuils en s'intéressant au nombre  $A_n$  d'individus adultes par kilomètre carré. Ces deux populations cohabitent actuellement en Europe. Les écureuils gris d'Amérique ont été introduits au début de XX<sup>e</sup> siècle en Angleterre. Plus gros et plus forts que les écureuils roux d'Eurasie, ils résistent mieux à certaines maladies qu'ils colportent. Aujourd'hui, l'écureuil gris d'Amérique devient invasif, en particulier en Angleterre et en Italie, où la population d'écureuils roux diminue de façon inquiétante.


Ce contexte est l'occasion d'étudier des suites dont le comportement à l'infini change en fonction d'un paramètre, ici le taux de survie annuel des adultes. On s'appuie sur des tableaux de valeurs et des représentations graphiques obtenues sur un tableur. On peut ainsi introduire l'idée de limite infinie (on peut trouver un seuil au-delà duquel les termes de la suite sont supérieurs à  $10^k$ ,  $k$  entier naturel étant donné) ou finie (on peut trouver un seuil au-delà duquel l'écart entre les termes de la suite et la limite est inférieur à  $10^{-k}$ ,  $k$  entier naturel étant donné).

**A 1**  ch1\_act1.ods, feuille « ProfesseurA ».

**2 a)** Quand  $n$  devient grand, la suite  $(A_n)$  semble prendre des valeurs de plus en plus grandes.

**b)** On a  $n_0 = 179$  et  $n_1 = 240$ .

**c)** On retrouve bien cette observation : il semble que le nombre d'écureuils gris d'Amérique ne cesse d'augmenter d'année en année suivant le modèle choisi (ce qui correspond à la réalité observée, en particulier en Angleterre et en Italie).

**B 1**  ch1\_act1.ods, feuille « ProfesseurB ».

**a)** Lorsque  $n$  devient grand, la suite  $(A_n)$  semble prendre des valeurs de plus en plus petites (proches de 0).

**b)** On a  $n_0 = 337$  et  $n_1 = 522$ .

**c)** Il semble que la suite  $(A_n)$  tende vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**d)** La modification du taux  $s$  de survie a modifié le comportement de la suite. La population des écureuils roux d'Eurasie semble diminuer et tendre vers l'extinction.

**2 a)** Par « tâtonnements », en testant des valeurs de  $s$  entre 0,29 et 0,33, et en regardant les modifications du graphique, on trouve qu'en prenant  $s$  environ égal à 0,311, les valeurs de la suite  $(A_n)$  semblent se stabiliser à une valeur environ égale à 66,9035 (arrondie à  $10^{-4}$  près).

**b)** La valeur arrondie à  $10^{-4}$  près de  $\frac{113}{1,689}$  est 66,9035, donc le résultat admis est cohérent avec la simulation sur tableur.

Pour déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $\left|A_{n_2} - l\right| < 10^{-4}$ , on peut ajouter une colonne dans la feuille de calcul dans laquelle on calcule cet écart (voir fichier). On obtient :  $n_2 = 35$ .

## Activité 2 Un puits... de sciences

Dans la première question, on réactive les connaissances de première sur les suites géométriques. À l'aide d'une représentation graphique, on illustre la notion de somme des termes d'une suite. On utilise alors une méthode géométrique, dont on peut imaginer assez simplement la généralisation, pour calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

**1 a)**  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = \frac{4}{5}$ ,  $u_3 = \frac{16}{25}$ .

**b)** Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n$ . La suite  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_1 = 1$  et de raison  $q = \frac{4}{5} = 0,8$ .

**c)** On déduit de la question précédente que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = u_1 q^{n-1} = 0,8^{n-1}$ .

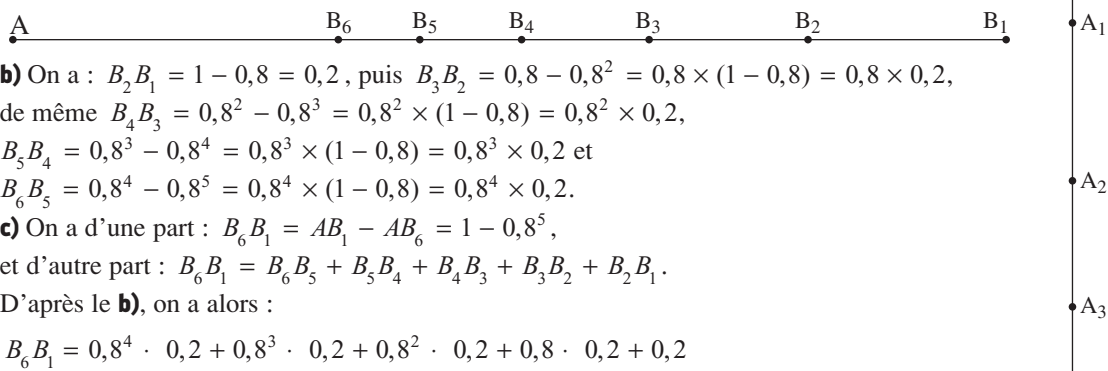
**2** La représentation ci-contre n'est pas à l'échelle demandée dans l'activité.

**3** On lit  $P_3 \approx 2,5$ .

On calcule :  $P_4 = 1 + 0,8 + 0,8^2 + 0,8^3 = 2,952$

**4** D'après l'expression écrite au **1 c)**, on a bien  $P_n = 1 + 0,8 + 0,8^2 + \dots + 0,8^{n-1}$ .

**5 a)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée dans l'activité.



**b)** On a :  $B_2B_1 = 1 - 0,8 = 0,2$ , puis  $B_3B_2 = 0,8 - 0,8^2 = 0,8 \times (1 - 0,8) = 0,8 \times 0,2$ , de même  $B_4B_3 = 0,8^2 - 0,8^3 = 0,8^2 \times (1 - 0,8) = 0,8^2 \times 0,2$ ,

$$B_5B_4 = 0,8^3 - 0,8^4 = 0,8^3 \times (1 - 0,8) = 0,8^3 \times 0,2 \text{ et}$$

$$B_6B_5 = 0,8^4 - 0,8^5 = 0,8^4 \times (1 - 0,8) = 0,8^4 \times 0,2.$$

**c)** On a d'une part :  $B_6B_1 = AB_1 - AB_6 = 1 - 0,8^5$ ,

et d'autre part :  $B_6B_1 = B_6B_5 + B_5B_4 + B_4B_3 + B_3B_2 + B_2B_1$ .

D'après le **b)**, on a alors :

$$\begin{aligned} B_6B_1 &= 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \\ &= 0,2(1 + 0,8 + 0,8^2 + 0,8^3 + 0,8^4). \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

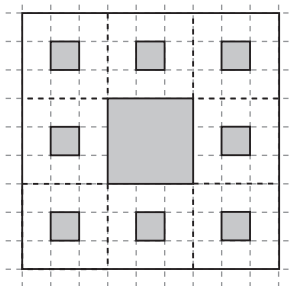
## Travaux Pratiques

### TP 1 « Plus il y a de gruyère... »

Ce TP est l'occasion de rencontrer un exemple de fractale, et de voir une méthode de construction d'une figure à partir d'un algorithme. À l'aide de suites géométriques, on vérifie que la suite des aires des figures ainsi construites tend vers zéro et celle des périmètres tend vers l'infini.

Pour des élèves ayant quelques difficultés, on pourra ne pas traiter la question **3**, démonstration du fait que la suite des aires est géométrique, et admettre le résultat conjecturé à la question **2**.

❶ La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée dans le TP.



❷ a) On a :  $A_0 = 81$ ,  $A_1 = 81 - 9 = 72$ ,  $A_2 = 72 - 8 \times 1 = 64$  et  $A_3 = 64 - 8 \times 8 \times \frac{1}{9} = \frac{512}{9}$ .

b)  $\frac{A_1}{A_0} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$ ,  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{64}{72} = \frac{8}{9}$  et  $\frac{A_3}{A_2} = \frac{\frac{512}{9}}{64} = \frac{8}{9}$ . On peut conjecturer que la suite  $(A_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{8}{9}$ .

❸ a) On a :  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 1$  et  $a_3 = \frac{1}{9}$ .

b) Pour passer de  $F_n$  à  $F_{n+1}$  on supprime des carrés dont le côté est le tiers de ceux supprimés à l'étape précédente, donc  $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n$ .

b) On retire  $M$  carrés d'aire  $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n$  à une figure d'aire  $A_n = M \cdot a_n$ . On obtient donc une figure d'aire  $A_{n+1} = M \times a_n - M \frac{1}{9}a_n = M \times \frac{8}{9}a_n$ .

c) On déduit de la relation précédente que  $A_{n+1} = \frac{8}{9}M \cdot a_n = \frac{8}{9}A_n$ . La suite  $(A_n)$  est donc bien une suite géométrique de raison  $q = \frac{8}{9}$ , comme cela avait été conjecturé à la question ❷ b).

❹ a) La suite  $(A_n)$  est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc elle converge vers 0.

b) On a, pour tout entier  $n$ ,  $A_n = 81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$ . Soit en utilisant un tableau de valeurs des termes de la suite, soit par « tâtonnements » et encadrements successifs, soit en utilisant un algorithme, on obtient  $n_0 = 77$ .

❺ a) On  $p_0 = 9 \cdot 4 = 36$ ,  $p_1 = 36 + 3 \cdot 4 = 48$ ;  $p_2 = 48 + 8 \cdot 1 = 56$ ;

$$p_3 = 56 + 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{424}{3}.$$

b) On a bien les mêmes résultats pour les quatre premiers périmètres en utilisant la formule indiquée.

c) On a :  $1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{8}{3}\right)^n}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{3}{5} \left( \left(\frac{8}{3}\right)^n - 1 \right)$ , donc

$$p_n = 12 \times \frac{3}{5} \left( \left(\frac{8}{3}\right)^n - 1 \right) + 36 = \frac{36}{5} \left( \left(\frac{8}{3}\right)^n - 1 \right) + 5 \times \frac{36}{5} = \frac{36}{5} \left( \left(\frac{8}{3}\right)^n + 4 \right).$$

d) D'après ❹ b), la première figure dont l'aire est inférieure à  $1 \text{ mm}^2$  est la figure  $F_{77}$ , elle a pour périmètre :

$$P_{77} \approx 4,54 \times 10^{33} \text{ cm (arrondi à } 10^{31} \text{ près)}.$$

e) D'après les résultats sur la limite d'une suite géométrique, le réel  $\frac{8}{3}$  étant strictement supérieur à 1, on

$$a : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty. \text{ On en conclut que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty.$$

Puisque la suite  $(p_n)$  tend vers  $+\infty$ , quelque soit le nombre  $P$  choisi, il existe un rang au-delà duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $P$ . Donc il existe un rang au-delà duquel tous les termes de la suite  $(p_n)$  sont supérieurs à 500. À l'aide d'un algorithme, ou d'un tableau de valeurs ou d'encadrements successifs, on trouve  $n_1 = 5$ .

6 L'aire de la figure  $F_n$  tend vers 0 alors que son périmètre tend vers  $+\infty$ .

## TP 2 Achille et la tortue

Dans ce TP, on travaille sur un paradoxe célèbre, le paradoxe de Zénon. On traite ce problème par deux modélisations : continue (question 2) et discrète (question 3). On illustre ici l'idée que la somme d'une infinité de nombres réels strictement positifs peut être finie.

1 Intuitivement, il est clair qu'Achille va rattraper la tortue, abstraction faite de la taille d'Achille et de la tortue. Le raisonnement de Zénon est imagé, mais il faudrait le faire en utilisant des points mathématiques se déplaçant sur une demi-droite.

2 a) La distance parcourue à vitesse constante est donnée par  $d = vt$ , soit ici pour la tortue, la distance parcourue, exprimée en mètres, en  $t$  secondes est  $0,1t$ . Après  $t$  secondes, la distance entre la ligne de départ d'Achille et la position de la tortue est  $100 + 0,1t$ .

b) En  $t$  secondes, Achille parcourt la distance de  $10t$  puisqu'il court à la vitesse de  $10 \text{ m.s}^{-1}$ .

c) Achille rejoint la tortue à l'instant  $t$ , solution de l'équation  $100 + 0,1t = 10t$ , soit  $t = \frac{100}{9,9} \approx 10,10$  secondes à 0,01 près.

3 a) et b) Achille se déplace 100 fois plus vite que la tortue, donc met  $0,1 \text{ s}$  pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ . La tortue met donc  $0,1 \text{ s}$  pour aller de  $M_2$  à  $M_3$ . Achille met alors  $0,001 \text{ s}$  pour aller de  $M_2$  à  $M_3$ , donc la tortue met ce même temps pour aller de  $M_3$  à  $M_4$ . On a donc  $t_2 = 0,1$  et  $t_3 = 0,001$ .

c) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $t_n$  est le temps mis par Achille pour aller de  $M_{n-1}$  à  $M_n$ . Pendant ce temps, la tortue va de  $M_n$  à  $M_{n+1}$ . Comme Achille avance 100 fois plus vite que la tortue, il mettra un temps  $\frac{t_n}{100}$  secondes pour aller de  $M_n$  à  $M_{n+1}$ ; on a donc  $t_{n+1} = \frac{t_n}{100}$ .

d) La suite  $(t_n)$  est donc la suite géométrique de premier terme  $t_1 = 10$  et de raison  $q = \frac{1}{100}$ .

$$e) \sum_{i=1}^n t_i = 10 + 10q + 10q^2 + \dots + 10q^{n-1} = 10(1 + q + \dots + q^{n-1}) = 10 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1000}{99} \left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right).$$

f) Le nombre  $q$  est strictement compris entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 0$ .

On en déduit la limite demandée.

g) S'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, il ne lui faut pas un temps infini puisque la limite de la somme des temps est  $\frac{1000}{99}$ . On obtient bien le même résultat qu'avec la modélisation continue de la question 2.

# Exercices

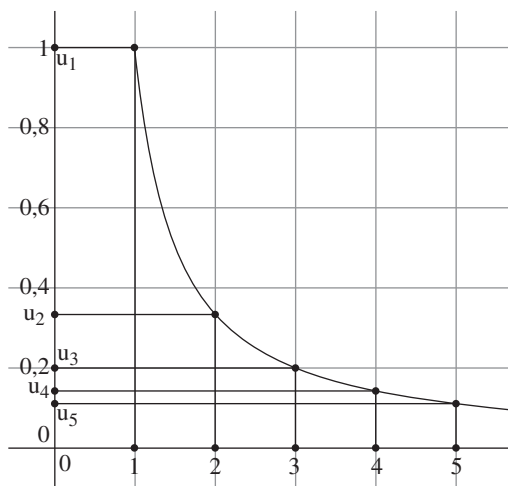
**2 a)**  $u_4 = -2$  ;  $u_5 = -1$  ;  $u_6 = -\frac{2}{3}$ .

**b)**  $u_0 = 1$  ;  $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $u_2 = 0$ .

**c)**  $u_1 = -1$  ;  $u_2 = 3$  ;  $u_3 = 19$ .

**4 a)** Pour tout  $x$  de  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2}$ , donc  $f'(x) < 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

**b)** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée dans le texte de l'exercice.

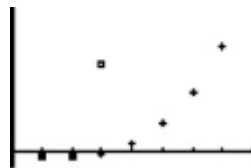


**6**  $N = 49$ .

**8 1. a)** Les deux suites semblent tendre vers  $+\infty$ . On peut également observer que les valeurs prises par la suite  $(u_n)$  semblent beaucoup plus grandes que celles prises par la suite  $(v_n)$  dès que  $n$  dépasse 10.

**b)** Sur ce graphique, les croix représentent les termes demandés pour la suite  $(v_n)$ , les carrés les termes demandés pour la suite  $(u_n)$ . Pour cette dernière, les points pour  $n > 15$  sont « hors écran ».

*Remarque :* on a utilisé ici les graphiques statistiques. Après avoir entré les définitions des suites, on passe en mode édition de liste statistique, on entre dans L1 les entiers de 0 à 40 avec un pas de 5, en mettant le curseur sur L2, on entre  $L2 = u(L1)$  et en mettant le curseur sur L3 on entre  $L3 = v(L1)$ , puis on utilise les graphiques statistiques pour afficher les deux nuages de points.



**2. a)** ch1\_ex8a.alg. On trouve  $N_0 = 32$ .

**b)** ch1\_ex8b.alg. On trouve  $N_1 = 1683$ .

**3.** Au vu des questions précédentes, il semble que la suite  $(u_n)$  tende vers  $+\infty$  en prenant, pour un même rang, des valeurs beaucoup plus grandes que celles prises par les termes de la suite  $(v_n)$ . On voit à la question 2 que, si on admet que les deux suites sont croissantes, le seuil au-delà duquel les termes de la suite  $(u_n)$  sont supérieurs à  $10^{10}$  est beaucoup plus petit que le seuil correspondant pour la suite  $(v_n)$ .

**9 1.** ch1\_ex9.ods. On peut faire la conjecture que la suite tend vers  $+\infty$ .

**2. a)** ch1\_ex9.alg. On trouve  $N_0 = 2549$ .

**b)** En remplaçant le seuil demandé dans l'algorithme, on obtient  $N_1 = 250481$ .

*Remarque :* on a ici, avec les exercices 8 et 9, des exemples de suites qui tendent vers l'infini de façons très différentes.

**10 1.**

$x$	0	100	200	300	400	500
$f(x)$	-5	9 999	39 999	89 999	159 999	249 999

$x$	600	700	800	900	1 000
$f(x)$	359 999	489 999	639 999	809 999	999 999

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_n = f(n)$ . À partir de ce tableau de valeurs, on peut faire la conjecture que la suite  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ .

**2.** D'après le tableau précédent, il semble que  $N$  soit compris entre 300 et 400. On obtient successivement que  $N$  est compris entre 310 et 320, puis que  $N = 317$ .

*Remarque :* pour justifier qu'on a bien ici le plus petit entier  $n$  tel que  $v_n$  soit supérieur à  $10^5$ , il faut justifier que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ , ce qui assure que, pour  $n$  inférieur à 317,  $f(n)$ , donc  $v_n$  est inférieur à  $10^5$ .

**12 1.** Il semble que la suite  $(u_n)$  tende vers  $+\infty$ .

**2.** ch1\_ex12.alg et ch1\_ex7\_8\_11\_12\_13.pdf. On obtient  $N = 1002$ .

**3. a)** Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Le dénominateur étant un carré,  $f'(x)$  est du signe de son numérateur, polynôme de degré 2 qui s'annule en  $-2 - \sqrt{5}$  et  $-2 + \sqrt{5}$ . Pour tout  $x$  de  $[-2 + \sqrt{5}; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est strictement positif. La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $[0; -2 + \sqrt{5}[$  et strictement croissante sur  $[-2 + \sqrt{5}; +\infty[$  donc sur  $[1; +\infty[$ .

**b)** La fonction  $f$  étant strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , pour tout entier  $n \geq 1002$ ,  $f(n) \geq f(1002)$ . Or  $f(1002) > 10^3$ , on en déduit donc que  $u_n > 10^3$ .  $N = 1002$  est un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $10^3$ .

**13 1.** Il semble que la suite  $(u_n)$  tende vers  $-\infty$ .

**2.** ch1\_ex13.alg et ch1\_ex7\_8\_11\_12\_13.pdf. On obtient  $N = 216$ .

**3. a)** Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , on a  $f'(x) = -3x^2 - 1$ . Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est strictement négatif. La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

**b)** La fonction  $f$  étant strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ , pour tout entier  $n \geq 216$ ,  $f(n) \leq f(216)$ . Or  $f(216) < -10^7$ , on en déduit donc que  $u_n < -10^7$ .  $N = 216$  est un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à  $-10^7$ .

**15 1.** On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

**2.** L'inéquation  $\sqrt{n-7} \geq 10^3$  équivaut à :  
 $n-7 \geq 10^6$ , soit  $n \geq 10^6 + 7$ .  
 D'où  $N_3 = 1\,000\,007$ .

**3. a)** L'inéquation  $\sqrt{n-7} \geq 10^p$  équivaut à  $n-7 \geq 10^{2p}$ , d'où  $N_p = 10^{2p} + 7$ .

**b)** On a montré que, pour tout entier naturel  $p$ , il existe un rang  $N_p$  à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $10^p$ . On a donc montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**16 1.** On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

**2. a)** Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , on a  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ , polynôme de degré 2 qui s'annule en 0 et  $\frac{4}{3}$ . Pour tout  $x$  de  $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ ,  $f'(x)$  est négatif, donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle ; pour tout  $x$  de  $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$ ,  $f'(x)$  est strictement positif, donc  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

**b)** On a  $f(2) = 0$  et  $f$  strictement croissante sur  $[2; +\infty[$ , donc, pour tout  $x$  de  $[2; +\infty[$ ,  $f(x)$  est supérieur à  $f(2)$ , donc est positif.

**3. a)** D'après la question précédente, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f(n) \geq 0$ , soit  $n^3 - 2n^2 \geq 0$ , soit encore  $n^3 - n^2 \geq n^2$ .

**b)** Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , d'après la définition, cela signifie que pour tout entier naturel  $p$ , il existe un rang  $N_p$  à partir duquel tous les  $n^2$  sont supérieurs à  $10^p$ . Donc, pour tout entier  $n \geq N_p$ ,  $u_n \geq n^2 \geq 10^p$ . Donc, au-delà du rang  $N_p$ , tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont supérieurs à  $10^p$ .

**c)** On a donc démontré à la question précédente le résultat conjecturé, à savoir que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

**18** On lit  $N = 32$ . On a :  $|u_{32} + 0,1| \leq 0,05$ .

**20 a)** On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  a pour limite 2.

**b)** ch1\_ex20.alg et ch1\_ex19\_20\_21\_22.pdf.

```
Variables N, V
Initialisation
N = 0, V = -1
Tant que |V - 2| > 10-5 faire
  N prend la valeur N + 1
  V prend la valeur  $\frac{2N^2 - 1}{N^2 + 1}$ 
Fin tant que
Afficher N
Fin
```

On trouve  $N = 548$ .

**21 a)** On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  a pour limite 1.

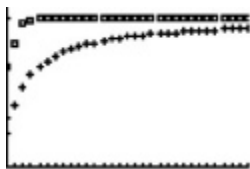
**b)** ch1\_ex21.alg et ch1\_ex19\_20\_21\_22.pdf.

```
Variables N, U
Initialisation
N = 1, U = cos(1)
Tant que |U - 1| > 10-4 faire
  N prend la valeur N + 1
  U prend la valeur  $\cos\left(\frac{1}{N}\right)$ 
Fin tant que
Afficher N
Fin
```

On trouve  $N = 71$ .

**22 1. a)** On peut conjecturer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont pour limite 3.

b)



c) En observant les tables de valeurs ou le graphique ci-dessus, on constate que les termes de la suite  $(u_n)$  sont « rapidement » très proches de 3, alors que, pour le même rang, ceux de la suite  $(v_n)$  sont plus éloignés de 3.

2. a) ch1\_ex22.alg et ch1\_ex19\_20\_21\_22.pdf.

On obtient  $N_0 = 22$ .

b) Pour avoir le même écart entre un terme de la suite  $(u_n)$  et 3 que entre un terme de la suite  $(v_n)$  et 3, il faut prendre un terme d'un rang beaucoup plus grand pour la deuxième suite par rapport à celui nécessaire pour la première. Cette observation confirme celles faites à la première question.

23 On peut faire un tableau de valeurs sur la calculatrice : dans ce cas, il faut trouver une façon de définir la suite par récurrence, ce qui peut être par

$$u_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geq 2, u_n = \frac{1}{\frac{1}{u_{n-1}} + n}.$$

On peut aussi écrire un algorithme affichant les valeurs de la suite jusqu'au rang entré par l'utilisateur (en faisant calculer la somme des entiers, puis son inverse, pour chaque terme successivement, comme dans l'algorithme proposé dans les fichiers du ). On peut, en observant ces valeurs, faire la conjecture que la suite  $(u_n)$  a pour limite 0.

Pour la détermination de  $N$ , ch1\_ex23.alg et ch1\_ex23\_24\_25.pdf. On trouve  $N = 447$ .

25 1.  $D_n = \left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(8n^2 + 1)}.$

2. ch1\_ex25.alg et ch1\_ex23\_24\_25.pdf

```
Variables N, D
Initialisation
N = 0, D = 0,5
Tant que |D| > 10-5 faire
N prend la valeur N + 1
D prend la valeur 1 / (2(8N2 + 1))
Fin tant que
Afficher N
Fin
```

On trouve  $N = 80$ .

3. a)  $f'(x) = -\frac{8x}{(8x^2 + 1)^2}$ . Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ , donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

b) Pour tout entier  $n \geq 80$ ,  $f(n) \leq f(80)$ , soit  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \left| u_{80} - \frac{1}{2} \right|$ ; or  $\left| u_{80} - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-5}$ , donc,

pour tout  $n \geq 80$ ,  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-5}$ . Le rang 80 est

un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0,5 inférieure à  $10^{-5}$ .

27 1. On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  a pour limite 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. a) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 + \sqrt{n}$  est strictement positif, donc il en est de même de  $u_n$ .

b) L'inéquation  $|u_n| \leq 10^{-4}$  équivaut à :

$$\frac{1}{2 + \sqrt{n}} \leq 10^{-4}, \text{ soit encore à } 2 + \sqrt{n} \geq 10^4, \text{ ou } n \geq (10^4 - 2)^2.$$

On a  $N_4 = 99\,960\,004$ .

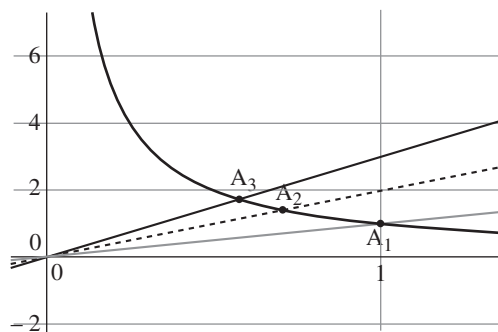
c) L'inéquation  $|u_n| \leq 10^{-p}$  équivaut à :

$$\frac{1}{2 + \sqrt{n}} \leq 10^{-p}, \text{ soit encore à } n \geq (10^p - 2)^2.$$

On a :  $N_p = (10^p - 2)^2$ .

d) On a montré que, pour tout entier naturel  $p$ , il existe un rang  $N_p$  à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0 inférieure à  $10^{-p}$ . On a donc montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

28 1. La représentation ci-dessous n'est pas faite à l'échelle demandée.



2. a) On peut faire la conjecture que la suite  $(u_n)$  a pour limite 0.

b) Le point  $A_n$  a pour coordonnées  $\left( x_n, \frac{1}{x_n} \right)$  d'une part,  $(x_n, nx_n)$  d'autre part. Donc  $nx_n = \frac{1}{x_n}$  avec



$x_n > 0$ . On obtient donc  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Pour tout entier  $p$ ,  $|x_n| \leq 10^{-p}$  équivaut à  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-p}$ , soit  $n \geq 10^{2p}$ . Donc, pour tout entier naturel  $p$ , il existe un rang  $N_p = 10^{2p}$  à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0 inférieure à  $10^{-p}$ . On a donc montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

**30 a)**  $u_3 = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}$  ;

$u_{12} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = -\frac{3}{4096}$ .

**b)**  $u_2 = (-1) \times (-2) = 2$  ;  
 $u_{15} = (-1) \times (-2)^{14} = -16\,384$ .

**31 a)**  $u_2 = 3 \cdot q^2 = 21$ . On en déduit que  $q = \sqrt{7}$  ou  $q = -\sqrt{7}$ . On a alors, dans les deux cas,  $u_8 = 3 \cdot q^8 = 3 \cdot 7^4 = 7\,203$ .

**b)**  $u_3 = 2 \cdot q^3 = 54$ . On en déduit que  $q^3 = 27$ , donc  $q = 3$ . On a alors  $u_{12} = 2 \cdot 3^{12} = 1062882$ .

**c)**  $u_6 = u_3 \cdot q^3$ . On en déduit que  $q^3 = -\frac{1}{8}$ , donc  $q = -\frac{1}{2}$ . On a alors  $u_{10} = -\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{1024}$ .

**32** La raison ne peut pas être  $-2$ , sinon le sixième terme serait du signe contraire du premier ; la raison ne peut pas être  $\frac{1}{2}$ , sinon le sixième terme serait inférieur au premier. Donc la seule raison possible est 2.

**34 a)** La suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique (on peut vérifier sur trois termes consécutifs).

**b)** La suite  $(v_n)$  est géométrique de premier terme  $v_0 = -3$  et de raison  $q = \frac{1}{5}$ .

**36** À chaque heure, la quantité de médicament diminue de 22 % : pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} = u_n - 0,22u_n = 0,78u_n$ . La suite  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison 0,78 et de premier terme  $u_0$ , quantité injectée dans le sang à l'instant  $t = 0$ .

**37** Pour tout entier naturel  $n$  :

$u_{n+1} = u_n + 0,015u_n = 1,015u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 50\,000$  et de raison  $q = 1,015$ .

**39 a)** On a  $u_0 = 15\,000$ ,  $u_1 = 15\,100$

et  $u_2 = 15\,200$ . Comme  $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ , la suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

**b)** Pour tout entier naturel  $n$  :

$u_{n+1} = u_n - 0,07u_n = 0,93u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,93.

**c)** La suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique (vérification sur les trois premiers termes).

**d)** Pour tout entier naturel  $n$  :

$u_{n+1} = u_n + 0,085u_n = 1,085u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 1,085.

**e)** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 70$ . On vérifie sur trois termes consécutifs que la suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

**41 a)** Pour tout entier naturel  $n$  :

$M_{n+1} = M_n - 0,083M_n = 0,917M_n$ .

La suite  $(M_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $M_0 = 100$  et de raison  $q = 0,917$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_n = 100 \cdot (0,917)^n$ .

**b)**  $M_5 = 100 \times (0,917)^5 \approx 64,84$  (valeur arrondie à  $10^{-2}$  près).

**c)** On peut utiliser une table de valeurs ou un algorithme programmé sur la calculatrice : la masse d'iode est strictement inférieure à 50 g au bout de 8 jours et à 10 g au bout de 27 jours.

**42** Si on nomme  $u_n$  la quantité de dioxyde de carbone rejeté pendant la  $n^{\text{ème}}$  année d'effort, la suite  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_0$  (quantité rejetée avant de commencer à réduire) et de raison 0,97. On cherche donc le plus petit entier  $n$  tel que  $0,97^n \leq 0,5$ . On obtient  $n = 23$ .

**44 a)** La raison est strictement supérieure à 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**b)** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**c)** Il s'agit d'une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{25}$ , raison comprise strictement entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

**45 a)** La raison est strictement supérieure à 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ .

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**b)** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**c)** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$ . On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .




**47 a)** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**b)** La raison est strictement supérieure à 1 et le premier terme strictement positif, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**c)** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**48 1. a)** La raison est strictement supérieure à 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,01^n = +\infty$ .

**b)** D'après le résultat précédent, pour tout entier naturel  $p$  (donc en particulier pour  $p = 100$ ) il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $10^p$ , donc  $N$  existe.

 ch1\_ex48.alg. On trouve  $N = 23\ 141$ .

**2.** La raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,99^n = 0$ . Par définition, cela signifie que pour tout entier  $p$  (en particulier  $p = 100$ ), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0 inférieure à  $10^{-p}$ . Donc  $N$  existe.

En modifiant l'algorithme précédent (condition « tant que  $U > 10^{-100}$  », calcul du terme suivant : «  $U$  prend la valeur  $0,99^N$  »), on obtient  $N = 22\ 911$ .

**49 1. a) et b)** On peut émettre la conjecture que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

On a  $|u_n| = 0,2^n$ . On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ .

Donc, pour tout entier  $p$  (en particulier  $p = 10$  ou  $p = 50$ ), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0 inférieure à  $10^{-p}$ . À l'aide d'un algorithme du même type que celui utilisé pour l'exercice **48 2.**, on obtient  $N = 15$  et  $N' = 72$ .

**c)** On peut conjecturer que, pour tout réel  $q$  strictement compris entre  $-1$  et  $0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

*Remarque : on peut faire remarquer aux élèves que cette conjecture se démontre simplement puisque la distance de  $q^n$  à 0 est  $|q^n| = |q|^n$  et que l'on peut alors utiliser le résultat connu sur une suite géométrique dont la raison appartient à l'intervalle  $[0 ; 1[$ .*

**2. a)** Pour  $n$  pair,  $(-1)^n = 1$ .

Pour  $n$  impair,  $(-1)^n = -1$ .

**b)** Il semble qu'elle n'ait pas de limite.

**c)** D'après le a), on a  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ . On en déduit que la suite n'a pas de limite car si elle en avait une alors, d'après le résultat admis,  $1 = -1$ .

*Remarque : on peut parler aux élèves à cette occasion de raisonnement par l'absurde.*

**3.** On constate que les termes de la suite deviennent très grand en valeur absolue mais sont alternativement positifs et négatifs (*Sur un tableau, on peut faire la représentation graphique, ce qui rend les conclusions plus « lisibles »*). Il semble que la suite ( $u_n = q^n$ ) n'ait pas de limite lorsque  $q < -1$ .

**51 a)**  $8 - 16 + 32 - 64 + \dots + 2\ 097\ 152$

$$= 8(1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 262\ 144)$$

$$= 8(1 + (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{18}).$$

On a donc :

$$8 - 16 + 32 - 64 + \dots + 2\ 097\ 152$$

$$= 8 \times \frac{1 - (-2)^{19}}{1 - (-2)} = 1\ 398\ 104.$$

**b)**  $-3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \dots - \frac{3}{16\ 384}$

$$= (-3) \left( 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^7 \right)$$

$$= (-3) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^8}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{65\ 535}{16\ 384}.$$

**c)**  $u_5 + u_6 + \dots + u_{25}$

$$= (-9) \times 10^4 + (-9) \times 10^5 + \dots + (-9) \times 10^{24}$$

donc  $u_5 + u_6 + \dots + u_{25}$

$$= -9 \times 10^4 \times (1 + 10 + \dots + 10^{20})$$

$$= -9 \times 10^4 \frac{1 - 10^{21}}{1 - 10} = 10^4 (1 - 10^{21}).$$

**52 a)**  $1 + (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{14}$

$$= \frac{1 - (-2)^{15}}{1 - (-2)} = \frac{32\ 769}{3} = 10\ 923.$$

**b)**  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11} = \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3}$

$$= \frac{531\ 440}{2} = 265\ 720.$$

**53 a)** Si on appelle  $l_n$  la longueur, en centimètres, du  $n$ -ième saut, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on a  $l_n = 0,5\ l_{n-1}$ . La suite  $(l_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $l_1 = 40$  et de raison  $q = 0,5$ .

**b)** Le sixième saut a pour longueur  $l_6 = 40 \times (0,5)^5 = 1,25$ .

c) Après 6 sauts, la puce s'est déplacée de :

$$L_6 = l_1 + l_2 + \dots + l_6 = 40 \times (1 + 0,5 + \dots + 0,5^5) \\ = 40 \times \frac{1 - 0,5^6}{1 - 0,5} = 78,75.$$

Après 12 sauts, la puce s'est déplacée de

$$L_{12} = l_1 + l_2 + \dots + l_{12} = 40 \times \frac{1 - 0,5^{12}}{1 - 0,5} \approx 79,98$$

(arrondi à  $10^{-2}$  près).

d) Après le  $n$ -ième saut, la puce a parcouru une longueur, en cm, de :

$$L_n = 40 \times \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} = 80(1 - 0,5^n).$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ , on peut donc en déduire

que la distance parcourue, quand  $n$  devient très grand, s'approche de 80 cm. La puce ne peut pas atteindre le cou de l'âne (sans se reposer ...).

**54 a)** Les cases de l'échiquier étant numérotées de 1 à 64, le nombre de grains de blé sur la case  $n$  est le double de celui de la case précédente. Si on appelle  $g_n$  le nombre de grains de la case  $n$ , on a donc, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2,  $g_n = 2g_{n-1}$ . La suite  $(g_n)$  est donc la suite géométrique de premier terme  $g_1 = 1$  et de raison 2. Le nombre total de grains est donc  $G = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$ , nombre de l'ordre de  $2 \times 10^{19}$ .

**b)** La masse totale est donc de l'ordre de  $2 \cdot 10^{19} \cdot 0,05 = 10^{18}$  grammes, soit  $10^{18} \times 10^{-6} = 10^{12}$  tonnes. La production mondiale actuelle étant de l'ordre de  $7 \times 10^7$  tonnes, Sissa demandait plus de 10 000 fois la production mondiale de blé actuelle.

**55** La longueur en millimètres du premier tube est  $l_1 = 155$ . Si on appelle  $l_n$  celle du  $n$ -ième tube, on a, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $l_n = 0,95l_{n-1}$ . La suite  $(l_n)$  est donc la suite géométrique de premier terme  $l_1 = 155$  et de raison  $q = 0,95$ .

La longueur totale de l'antenne déployée est donc  $L = 2 \cdot 15 + l_1 + l_2 + \dots + l_n$ , si l'antenne comporte  $n$  tubes.

On cherche donc  $n$  tel que :

$$700 - 30 \leq l_1 + l_2 + \dots + l_n \leq 800 - 30.$$

Or, on a

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = 155(1 + 0,95 + \dots + 0,95^{n-1}) \\ = 155 \frac{1 - 0,95^n}{1 - 0,95} = 3100(1 - 0,95^n).$$

On cherche donc  $n$  tel que :

$$\frac{67}{310} \leq 1 - 0,95^n \leq \frac{77}{310}.$$

A l'aide d'un tableau de valeurs des termes de la suite définie, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par  $u_n = 1 - 0,95^n$ , on obtient  $n = 5$ .

## Problèmes

**59 1. a)** On a  $n = 1$ ,  $u = 1$  et on entre  $m = 3$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $n < m$ , donc  $n$  prend la valeur 2 et  $u$  prend la valeur  $\frac{5}{2}$ , l'algorithme affiche :  $n = 2$ ,

$$u = \frac{5}{2}.$$

On a  $n = 2$ , la condition  $n < m$  est vérifiée, donc  $n$  prend la valeur 3 et  $u$  prend la valeur 3 ; l'algorithme affiche  $n = 3$ ,  $u = 3$ .

On a  $n = 3$ , la condition  $n < m$  n'est pas vérifiée, fin de l'algorithme.

L'algorithme affiche tous les termes de la suite  $(u_n)$  jusqu'au terme de rang  $m$  entré par l'utilisateur. La variable  $n$  est l'indice du terme, la variable  $u$  prend successivement les valeurs des termes de la suite, la variable  $m$  est l'indice du dernier terme à afficher.

**b)**  ch1\_pb59.alg.

**c)** On peut conjecturer que la suite a une limite finie proche de 4.

*Remarque : on peut provoquer un débat avec les élèves sur la valeur de cette conjecture à partir de 15 termes. On peut aussi essayer de se convaincre davantage en faisant afficher plus de termes par l'ordinateur ou la calculatrice.*

Représentation des 80 premiers termes de la suite, la fenêtre graphique étant réglée avec X compris entre 0 et 81, graduation de 10 en 10, Y compris entre 0 et 4,1.



**2. a)**  $|u_n - 4| = \left| \frac{-3}{n} \right| = \frac{3}{n}.$

**b)** L'inéquation à résoudre équivaut à  $n > 3 \times 10^4$ . A partir du terme d'indice  $N = 30\,000$ , tous les termes de la suite sont à une distance de 4 inférieure à  $10^{-4}$ .

**c)** On cherche, s'il existe, le plus petit entier  $n$  tel que  $|u_n - 4| < 10^{-p}$ . Cette inéquation est équivalente à  $n > 3 \times 10^p$ . On donc  $N_p = 3 \times 10^p$ .

On a montré que, pour tout entier  $p$ , il existe un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 4 inférieure à  $10^{-p}$ , on a donc prouvé que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

**60 1. a)** On a  $n = 1$ ,  $v = 2$ ,  $u = \frac{3}{4}$  et on entre  $m = 3$ .

Pour  $n = 1$ , la condition  $n < m$  est vérifiée, donc  $n$  prend la valeur 2,  $w$  prend la valeur  $\frac{5}{16}$ ,  $v$  prend

la valeur  $\frac{3}{4}$ ,  $u$  prend la valeur  $\frac{5}{16}$ ; l'algorithme

affiche :  $n = 2$ ,  $u = \frac{5}{16}$ .

On a  $n = 2$ , la condition  $n < m$  est vérifiée, donc  $n$  prend la valeur 3,  $w$  prend la valeur  $\frac{9}{64}$ ,  $v$  prend


la valeur  $\frac{5}{16}$  et  $u$  prend la valeur  $\frac{9}{64}$ ; l'algo-

ritme affiche  $n = 3$ ,  $u = \frac{9}{64}$ .

On a  $n = 3$ , la condition  $n < m$  n'est pas vérifiée, l'algorithme s'arrête.


L'algorithme affiche tous les termes de la suite  $(u_n)$  jusqu'au terme de rang  $m$  entré par l'utilisateur. La variable  $n$  est l'indice du terme. À l'initialisation,  $v$  prend la valeur de  $u_0$  et  $u$  la valeur de  $u_1$ .

À chaque étape,  $w$  prend la valeur de  $u_n$ ,  $v$  prend la valeur de  $u_{n-1}$ , puis  $u$  prend la valeur de  $u_n$ .

**b)**  ch1\_pb60\_1b.alg.

**c)** On peut conjecturer que la suite a une limite finie proche de 0.

*Remarque : on peut provoquer un débat avec les élèves sur la valeur de cette conjecture à partir de 15 termes. On peut aussi essayer de se convaincre davantage en faisant afficher plus de termes par l'ordinateur ou la calculatrice.*

 ch1\_pb60\_1c.alg.

Pour  $p = 10$ , on obtient  $n = 34$  et  $u = 5,82 \times 10^{-11}$  (arrondi à  $10^{-13}$  près).

Pour  $p = 15$ , on obtient  $n = 50$  et  $u = 8,88 \times 10^{-16}$  (arrondi à  $10^{-18}$  près).

**2.** D'après le cours,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$

donc on peut confirmer la conjecture faite à la question **1. b)**.

**61 1. a)** Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a  $u_n = u_{n-1} + 0,02u_{n-1} = 1,02u_{n-1}$ . La suite  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_1 = 85$  et de raison  $q = 1,02$ .

**b)** Pour un puits de  $n$  mètres, la facture du forage est

$$\begin{aligned} F_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= 85(1 + 1,02 + \dots + 1,02^{n-1}) \\ &= 85 \frac{1 - 1,02^n}{1 - 1,02} = 4250(1,02^n - 1). \end{aligned}$$

**2. a)** Si l'eau est à 37 mètres, la facture s'élève à  $F_{37} = 4250(1,02^{37} - 1) \approx 4592,91$  (arrondi au centime d'euro près).

**b)** On cherche le plus petit entier  $n$  tel que

$$F_n > 6\,000, \text{ soit } 1,02^n > \frac{41}{17}.$$

A l'aide d'un tableau des valeurs de la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier  $n$  par  $v_n = 1,02^n$ , on trouve  $n = 45$ . Hervé peut, avec son budget, faire forer au maximum jusqu'à une profondeur de 44 mètres.

**62 1. a)** Il s'agit des termes d'une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 8.

**b)** Passer de 85 à 106 dB correspond à une augmentation de  $7 \times 3$  dB. Le temps d'exposition est donc  $8 \times 0,5^7 = 0,0625$  heures, soit 3 min 45 s.

**c)** Pour une exposition à 102 dB, on n'a plus un nombre entier de fois 3 dB, donc on ne peut pas utiliser les termes de la suite géométrique.

**2. a)** Si on appelle  $q$  la raison de cette suite, on a  $u_n = 8 \times q^n$ , en particulier  $u_3 = 8 \times q^3 = 4$ . La raison  $q$  est donc solution de l'équation  $q^3 = 0,5$ , on a donc  $q = \sqrt[3]{0,5}$ .

**b)** On cherche  $u_{35} = 8 \times (\sqrt[3]{0,5})^{35} \approx 0,0025$  (arrondi à  $10^{-4}$  heures), soit 9 secondes.

**63 1. a)**  $u_1 = 0,85$   $u_0 + 1200 = 5450$  ;  $u_2 = 0,85$   $u_1 + 1200 = 5832,5$ .

**b)** Pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$u_{n+1} = 0,85 \quad u_n + 1200.$$

**c)**  ch1\_pb63.pdf. On obtient  $N = 7$ .

**d)** En modifiant l'algorithme précédent afin qu'il donne le premier entier  $N$  tel que  $u_N > 7500$ , on trouve 12. On dépasse donc 7 500 clients le douzième mois de campagne publicitaire.

**2.** Au tableur ou à la calculatrice, on observe les 60 premiers termes de la suite. On peut faire la conjecture que cette suite a pour limite 8 000.

**3. a)**  $v_0 = -3\,000$ ,  $v_1 = -2\,550$ ,  $v_2 = -2\,167,5$ .

**b)** Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 8000 = 0,85 \times u_n + 1200 - 8000 \\&= 0,85 \times u_n - 6800 = 0,85(u_n + 8000) - 6800 \\&= 0,85v_n.\end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc la suite géométrique de premier terme  $v_0 = -3\,000$  et de raison  $q = 0,85$ .

**c)**  $v_n = -3000 \times 0,85^n$ .

**d)**  $u_n = v_n + 8000 = -3000 \times 0,85^n + 8000$ .

**e)**  $0,85$  est compris strictement entre  $0$  et  $1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ . On peut donc confirmer la conjecture du 2.a).

**f)** Puisque la limite de la suite  $(u_n)$  est  $8\,000$ , pour tout entier  $p$  (en particulier  $0$ ), il existe un seuil à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de  $8\,000$  inférieure à  $10^{-p}$ .

On a  $|u_n - 8000| = |v_n| = 3000 \times 0,85^n$ .

On cherche  $N$  tel que  $0,85^n < \frac{1}{3000}$ . À l'aide

d'un tableau de valeurs ou d'un algorithme, on trouve  $N = 50$ . Après 50 mois de promotions, la clientèle se stabilise à  $8\,000$  clients.

**64 1.** En 2013, on aura :

$$0,95 \times 5\,000 + 300 = 5\,050 \text{ arbres, en 2014,}$$

$$0,95 \times 5\,050 + 300 = 5\,097,5.$$

**2.**  $u_{n+1} = 0,95u_n + 300$ .

**3. a)**  $v_{n+1} = u_{n+1} - 6000$   
 $= 0,95u_n + 300 - 6000$   
 $= 0,95u_n - 5700$   
 $= 0,95(u_n + 6000) - 5700 = 0,95v_n$ .

La suite  $(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = -1\,000$  et de raison  $q = 0,95$ .

**b)**  $v_n = -1000 \times 0,95^n$ .

**c)**  $u_n = v_n + 6000 = -1000 \times 0,95^n + 6000$ .

**4. a)** On a :  $2\,020 = 2\,012 + 8$   
donc  $u_8 = -1000 \times 0,95^8 + 6000 \approx 5337$   
(arrondi à l'entier près).

**b)**  $0,95$  est compris strictement entre  $0$  et  $1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ . On peut en conclure que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $6\,000$ .

**5. a)** Pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} - u_n = 1000(0,95^n - 0,95^{n+1})$ .

Or  $0,95^{n+1} < 0,95^n$ , donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ ,

soit  $u_{n+1} > u_n$ .

**b)** Le nombre d'arbres augmente chaque année.

**c)** On cherche  $n$  tel que  $u_n > 5\,500$ . On trouve  $N = 14$ .

**6.** La limite de la suite est  $6\,000$  ; le nombre d'arbres augmente chaque année jusqu'à se stabiliser à  $6\,000$  arbres ; il n'atteindra donc pas  $6\,200$ .

**65 1. a)** Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $1$ ,  
 $p_{n+1} = 0,95p_n$ . La suite  $(p_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $p_1 = 25$  et de raison  $q = 0,95$ .

**b)**  $T_n = 25(1 + 0,95 + \dots + 0,95^{n-1})$   
 $= 25 \frac{1 - 0,95^n}{1 - 0,95} = 500(1 - 0,95^n)$ .

**2. a)** Si on commande entre  $10$  et  $15$  albums sur le site A, chaque album est facturé  $0,73 \times 25 = 18,25$  €. La somme  $S_n$  est alors égale à  $18,25n$ .

**b)** Pour l'achat de  $10$  à  $14$  albums, le site A est le moins cher, pour  $15$  albums le site B est le moins cher.

**3. a)**  ch1\_pb65.ods.

**b)** Le site B est le plus intéressant si on commande entre  $20$  et  $50$  albums.

**66** La suite  $(I_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $I_0$  et de raison  $0,77$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = 0,77^n I_0$ . On cherche  $I_0$ , sachant que  $I_8 = 5$ . On obtient  $I_0 = 40,5$  (arrondi à  $10^{-1}$  près).

**67** Si on appelle  $p_n$  la proportion de carbone  $14$  par rapport au carbone  $12$  après  $5\,600n$  années, on a  $p_{n+1} = 0,5p_n$ . La suite  $(p_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $p_0 = 10^{-12}$  et de raison  $0,5$ . On peut donc écrire  $p_n = 0,5^n \times 10^{-12}$ . On cherche  $n$  tel que  $p_n = 6,25 \times 10^{-14}$ . On trouve  $n = 4$ . Les peintures étudiées ont donc été faites il y a environ  $4 \times 5\,600$  ans, soit  $22\,400$  ans.

**68 1.**  $P_{100} = \frac{9,9 \times 10^{-5}}{10^4} \times 10^{-2} = 9,9 \times 10^{-11}$  ;

$$P_{500} = \frac{9,9 \times 10^{-5}}{25 \times 10^4} \times 10^{-2} = 3,96 \times 10^{-12},$$

$$P_{1000} = \frac{9,9 \times 10^{-5}}{10^6} \times 10^{-2} = 9,9 \times 10^{-13}.$$

**2. a)** D'après le calcul précédent, le signal n'est pas reçu si le récepteur est à  $1$  km de l'émetteur, alors qu'il est reçu à  $500$  m de l'émetteur.

**b)** On résout l'inéquation  $P_n < 3 \times 10^{-12}$ . On trouve  $n > \sqrt{33} \times 10^2$ . Le signal n'est pas reçu si le récepteur se trouve à plus de  $574$  mètres (arrondi au mètre près).

**69 1.** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $E_{n+1} = E_n + 0,03E_n = 1,03E_n$ . La suite  $(E_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $E_0 = 6,8$  et de raison  $q = 1,03$ . On en déduit la relation donnée.

**2. a)**  $E_{15} = 10,6$  (arrondi au dixième près).

**b)** De 2000 à 2015, la somme des émissions est  $S = E_0 + E_1 + \dots + E_{15}$

$$= 6,8(1 + 1,03 + \dots + 1,03^{15})$$

$$= 6,8 \frac{1 - 1,03^{16}}{1 - 1,03} \approx 137,1$$

(arrondi au dixième près).

**3. a)** La raison est strictement supérieure à 1 et le premier terme est strictement positif, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = +\infty$ .

**b)** D'après la limite précédente, pour tout entier naturel  $p$ , il existe un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $10^p$ .

**c)** Variables  $N, P, E$

Initialisation

$N = 0, E = 6.8$

Entrer  $P$

Tant que  $|E| < 10^p$  faire

$N$  prend la valeur  $N + 1$

$E$  prend la valeur  $1,03E$

Fin tant que

Afficher  $N$

Fin

**d)** Pour  $p = 2$ , on obtient  $n = 91$ . Selon ce modèle, les émissions de  $\text{CO}_2$  dépasseront 100 milliards de tonnes en 2091.

**70 1.**  $s_1 = 0,0909 \cdot 100 + 0,909 \cdot 70 = 72,72$  ;  
 $s_2 = 0,0909 \times 100 + 0,909 \times 72,72 \approx 75,19$  ;  
 $s_3 = 9,09 + 0,909 \times s_2 \approx 77,44$  ;  
 $s_4 = 9,09 + 0,909 \times s_3 \approx 79,48$  .

**2.** Pour tout entier  $n$  non nul,  $s_n = 9,09 + 0,909s_{n-1}$ .

**3. a)** Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} = s_{n+1} - \frac{9090}{91} = 9,09 + 0,909s_n - \frac{9090}{91}$$

$$= 0,909s_n - \frac{8262,81}{91}.$$

Or  $s_n = v_n + \frac{9090}{91}$  donc :

$$v_{n+1} = 0,909 \left( v_n + \frac{9090}{91} \right) - \frac{8262,81}{91} = 0,909v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0$  et de raison  $q = 0,909$ .

**b)**  $v_0 = s_0 - \frac{9090}{91} = -\frac{2720}{91}$ . On a donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = -\frac{2720}{91} \times 0,909^n$ .

**c)** Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$s_n = v_n + \frac{9090}{91} = -\frac{2720}{91} \times 0,909^n + \frac{9090}{91}.$$

**d)** Le nombre 0,909 est strictement compris entre 0 et 1, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,909^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{9090}{91}$ .

**4. a)** À l'aide d'une table de valeurs sur la calculatrice, on obtient  $n = 37$ .

**b)** La voiture roule à au moins 99 % de la vitesse demandée au bout de 37 secondes.

**c)** La voiture roule à la vitesse constante de  $99 \text{ km.h}^{-1}$  37 secondes après que la vitesse de  $100 \text{ km.h}^{-1}$  ait été demandée au régulateur.

**71 A 1.** On a  $k^2 = \frac{1,035}{1,5} = 0,69$ , donc  $k = \sqrt{0,69} \approx 0,8307$ . La bille est validée.

**2. a)** Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $h_n = k^2 h_{n-1}$ . La suite  $(h_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $h_0 = 1,5$  et de raison 0,69.

**b)** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_n = 1,5 \cdot 0,69^n$ .

**c)**  $h_9 = 1,5 \times 0,69^9 \approx 0,053$  (arrondi à  $10^{-3}$  près).

**3. a)**

$$H_9 = 1,5 \cdot 0,69 + 1,5 \cdot 0,69^2 + \dots + 1,5 \cdot 0,69^9$$

$$= 1,035(1 + 0,69 + \dots + 0,69^8)$$

$$H_9 = 1,035 \frac{1 - 0,69^9}{0,31} \approx 3,220$$

(arrondi au mm près).

$$H'_9 = 1,5 + 1,5 \cdot 0,69 + 1,5 \cdot 0,69^2 + \dots$$

$$+ 1,5 \cdot 0,69^8$$

$$= 1,5(1 + 0,69 + \dots + 0,69^8)$$

$$H'_9 = 1,5 \frac{1 - 0,69^9}{0,31} \approx 4,667$$

(arrondi au mm près).

**b)** On a donc (en utilisant les valeurs exactes)  $\frac{H_9}{H'_9} = \frac{1,035}{1,5} = 0,69$ . On remarque que ce rapport est égal à  $k^2$ .

**B 1. a)**

$$U_N = u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^N = u_0 q \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$\text{et } U'_N = u_0 + u_0 q + \dots + u_0 q^{N-1} = u_0 \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

$$\text{b)} \frac{U_N}{U'_N} = \frac{u_0 q}{u_0} = q.$$

2. On a vu que la suite  $(h_n)$  est une suite géométrique de raison  $k^2$ . D'après la question précédente, on a  $\frac{H'_N}{H'_N} = k^2$ .

$$\text{3. On obtient } \frac{H_9}{H'_9} = \frac{3,2}{4,648}. \text{ Or } \sqrt{\frac{3,2}{4,648}} < 0,83.$$

À partir de cette évaluation, on doit donc considérer que la bille n'est pas valide.

## Vers le Bac

**72 1.**  $u_0 = 500$  ;

$$u_1 = 500 + 0,025 \times 500 + 100 = 612,5.$$

$$\text{b)} u_2 = 1,025u_1 + 100 \approx 727,81 \quad (\text{arrondi à } 10^{-2} \text{ près}).$$

$$\text{c)} \text{ Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1,025u_n + 100.$$

2. a)

$n$	1	2	3	4	5
$u_n$	500,00	612,50	727,81	846,01	967,16

$n$	6	7	8	9	10
$u_n$	1091,34	1218,62	1349,09	1482,81	1619,88

$n$	11	12	13	14	15
$u_n$	1760,38	1904,39	2052,00	2203,30	2358,38

b) Il disposera de 1 349,09 € après 8 ans et d'au moins 2 000 € après 13 ans.

**73 1.** La variable  $P$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n^2$ . On peut vérifier sur les trois premiers termes que la suite n'est pas géométrique.

c) Cela signifie que la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $u_n > 10^{80}$  est 9.

d) On peut en conclure que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

2. a) Cet algorithme donne, pour une valeur de  $P$  entrée par l'utilisateur, le premier entier naturel  $N$  pour lequel la distance entre  $u_N$  et 2 est inférieure à  $10^{-P}$ .

b) Quelque soit la valeur de  $P$  entrée, il existe une valeur de  $N$  remplissant les conditions décrites à la question a) car la limite de la suite  $(u_n)$  est 2.

**74 1. b) ; 2. b) ; 3. c) ; 4. a)**

**75 a)** Vrai. La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1. Elle

a donc pour limite  $+\infty$ . Donc, pour tout entier naturel  $p$  (et en particulier pour  $p = 999$ ), il existe un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $10^p$ .

b) Faux. La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,78 donc a pour limite 0. Donc, pour tout entier naturel  $p$  (et en particulier pour  $p = 50$ ), il existe un seuil au-delà duquel tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à  $10^{-p}$ .

c) Faux. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - 3| = 0,3^n$  et  $0 \leq 0,3^n \leq 1$ .

**76 1. a)**  $P_1 = P_0 - 0,292P_0 = 0,708P_0$ .

b) Puissance disponible après 2 tronçons :

$$P_2 = P_1 - 0,292P_1 = 0,708P_1 = 0,708^2P_0.$$

La proportion de puissance disponible est donc 0,501 (à  $10^{-3}$  près), soit 50,1 %.

c) Soit  $P_n$  la puissance disponible après  $n$  tronçons de 100 mètres. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_{n+1} = 0,708P_n$ . La suite  $(P_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $P_0$  et de raison 0,708. On a donc  $P_5 = 0,708^5P_0$ . La proportion de puissance disponible après 500 mètres de câble est 17,8% à 0,1% près.

2. a) Voir question 1. c).

b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n = 0,708^n P_0$ .

c) La proportion de puissance disponible après 15 tronçons de câble est  $0,708^{15}$ , soit 0,6 % arrondi à 0,1 % près.

3. a) Le nombre 0,708 est strictement compris entre 0 et 1 donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,708^n = 0$ .

b) D'après la limite précédente, quelque soit l'entier naturel  $p$  (et en particulier pour  $p = 7$ ), il existe un seuil  $N$  à partir duquel  $0,708^N < 10^{-p}$ . On trouve  $N = 46$ .

c) D'après le résultat précédent, la distance limite d'éligibilité est 4 600 mètres.

**77 1. a)** Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $E_n = E_{n-1} - 0,006E_{n-1} = 0,994E_{n-1}$ . La suite  $(E_n)$  est donc une suite géométrique de raison 0,994.

On en déduit que  $\frac{E_n}{E_0} = 0,994^n$ .

b) On a  $\frac{E_{30}}{E_0} = 0,994^{30}$ , donc le taux de réduction est  $1 - 0,994^{30} \approx 0,165$  à  $10^{-3}$  près soit un taux de réduction de 16,5 % (arrondi à 0,1 % près).

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$E_n = E_{n-1} - \frac{t}{100} E_{n-1} = \left(1 - \frac{t}{100}\right) E_{n-1}.$$



La suite  $(E_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ . On en déduit  $\frac{E_n}{E_0} = \left(1 - \frac{t}{100}\right)^n$ .

**3. a)** On doit compléter le tableau jusqu'à la ligne 32.

**b)** Dans la cellule B2, on a  $E_0/E_0$ , donc 1.

**c)** On entre : «  $=(1-\text{\$C\$2}/100)*\text{B2}$  ».

**d)** Pour atteindre les objectifs fixés, il faut réduire les émissions de 0,75 % par an. Cela représente de 1990 à 2009, un rapport entre les émissions égal à  $\frac{E_{19}}{E_0} = \left(1 - \frac{0,75}{100}\right)^{19} \approx 0,8667$  (arrondi à  $10^{-4}$  près), soit un taux de réduction entre 1990 et 2009 de  $1 - \left(1 - \frac{0,75}{100}\right)^{19} \approx 0,1333$ . Comme on constate que la réduction entre 1990 et 2009

est supérieure à celle qui était nécessaire, on peut considérer que l'on est en avance sur les objectifs fixés.

**78** Si on appelle  $p_n$  la quantité en milligrammes de pénicilline dans le sang  $n$  heures après l'injection, on peut écrire, d'après la première hypothèse qu'il existe un nombre  $k$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$p_n = p_{n-1} - kp_{n-1} = (1 - k)p_{n-1}.$$

La suite  $(p_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 1 - k$ . D'après la deuxième hypothèse, on a  $p_2 = 0,5p_0$ , on en déduit que  $q^2 = 0,5$ , soit  $q = \sqrt{0,5}$ . On cherche alors  $n$  tel que  $p_n < 0,01$ . À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, on obtient  $n = 18$ . Après 18 heures, on peut considérer qu'il n'y a plus de pénicilline dans le sang.

## Activités

## Activité 1 Passées les bornes, il y a une limite !

Dans la partie A, on se familiarise avec le contexte en manipulant le lien entre temps, distance et vitesse moyenne. Dans la partie B, on définit une fonction correspondant à la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet. On découvre ainsi, dans un contexte concret, la notion de limite finie à l'infini.

**A 1** Il parcourt les 100 premiers kilomètres en 2 heures.

**2 a)** Il parcourt les 100 derniers kilomètres en 1 heure et le trajet complet en 3 heures.

•  $\frac{200}{3} \approx 66,7$ . Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 66,7 km/h.

**b)** •  $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$  ;  $2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$ . Il parcourt les 100 derniers kilomètres en  $\frac{5}{6}$  d'heure et le trajet complet en  $\frac{17}{6}$  d'heures.

•  $\frac{200}{\frac{17}{6}} \approx 70,6$ . Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 70,6 km/h.

**3 a)**  $2 \text{ h } 40 = 2 + \frac{2}{3}$  d'heure ;  $\frac{200}{2 + \frac{2}{3}} = 75$ . Il prévoyait de rouler à 75 km/h.

**b)** Il lui reste 40 minutes pour les 100 derniers km.

**c)**  $\frac{100}{\frac{2}{3}} = 150$ . Sa vitesse moyenne sur les 100 derniers km devrait être de 150 km/h pour arriver dans les

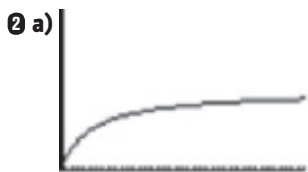
délais. Il ne peut donc pas arriver à l'heure en respectant le code de la route.

**B 1 a)** Le temps de parcours des 100 derniers kilomètres est  $\frac{100}{x}$ .

Le temps de parcours des 200 kilomètres est  $2 + \frac{100}{x}$ .

**b)**  $V(x) = \frac{200}{2 + \frac{100}{x}} = \frac{200x}{2x + 100}$ .





Les valeurs de  $Y$  croissent, mais de plus en plus lentement, lorsque  $X$  devient de plus en plus grand.

b)  $V(1000) \approx 95,238$  ;  $V(10\,000) \approx 99,502$  ;  $V(100\,000) \approx 99,950$ .

c) Lorsque  $x$  prend de très grandes valeurs, il semble que  $V(x)$  augmente mais sans dépasser une certaine valeur. On ne peut donc pas imaginer atteindre une vitesse moyenne aussi grande qu'on le souhaiterait sur l'ensemble des 200 kilomètres. La vitesse moyenne « limite » semble être de 100 km/h.

3  $V(x) = 100 \Leftrightarrow \frac{200x}{2x+100} = 100 \Leftrightarrow \frac{-10000}{2x+100} = 0$  ; cette équation n'a pas de solution. On en déduit que

la vitesse moyenne sur l'ensemble des 200 km ne peut pas être égale à 100 km/h.

On peut finir en faisant réfléchir les élèves sur le temps, ce qui permet de comprendre ici pourquoi la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est majorée : Yves a mis deux heures pour faire les 100 premiers kilomètres. Quelque soit la vitesse sur la fin du parcours, il mettra au total plus de deux heures, donc sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours restera inférieure à 100 km.h<sup>-1</sup>. On peut donc comprendre concrètement ici qu'on a une fonction strictement croissante mais dont les valeurs sont « plafonnées », ce qui illustre l'idée de limite finie à l'infini : on peut envisager d'avoir  $V = 99,99$  par exemple, à condition que  $x$  soit suffisamment grand, mais on ne peut pas avoir  $V = 100$ .

On peut également compléter le travail par une observation graphique sur un logiciel de géométrie dynamique et l'introduction de la notion d'asymptote horizontale.

## Activité 2 Jusqu'où va-t-elle ainsi ?

On étudie dans cette activité le comportement d'une fonction rationnelle lorsque  $x$  s'approche d'une valeur qui annule son dénominateur. Dans la partie A, il s'agit d'une observation numérique, à l'aide de la calculatrice ; dans la partie B, d'une observation graphique à l'aide de GeoGebra et de l'introduction de la notion d'asymptote verticale.

A 1 a)  $f'(x) = \frac{10}{(2-x)^2}$  ; pour tout  $x$  de  $[-8 ; 2[$ ,  $f'(x) > 0$

$x$	-8	2
$f'(x)$	+	
$f$	6	

b)  $f(-8) = 6$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[-8 ; 2[$ . Le minimum de  $f$  sur  $[-8 ; 2[$  est 6.

2 a) Les valeurs de  $f(x)$  sont données à 0,1 près.

$x$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	15	16,1	17,5	19,3	21,7	25	30	38,3	55	105

Lorsque  $x = 2$ , la calculatrice affiche ERREUR.

b) Les valeurs de  $f(x)$  sont données à 0,1 près.

$x$	1,9	1,91	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99
$f(x)$	105	116,1	130	147,9	171,7	205	255	338,3	505	1 005

Les valeurs de  $f(x)$  sont données à 1 près.

$x$	1,99	1,991	1,992	1,993	1,994	1,995	1,996	1,997	1,998	1,999
$f(x)$	1 005	1 116	1 255	1 434	1 672	2 005	2 505	3 338	5 005	10 005

Lorsque  $x$  se rapproche de 2,  $f(x)$  semble être de plus en plus grand.

**b)**  $C_f$  semble « monter » parallèlement à l'axe des ordonnées quand  $x$  se rapproche de 2.

**c)**  $D$  et  $C_f$  semblent de plus en plus proches l'une de l'autre quand  $x$  se rapproche de 2.

**2 b)** En prenant  $A = 10\,200$ , il semble possible de trouver une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) > 10\,200$ .

**3 a)** Avec la condition  $x < 2$ ,  $\frac{20-5x}{2-x} > 10200 \Leftrightarrow x > \frac{4076}{2039}$ . Or  $\frac{4076}{2039} \approx 1,99902$  (arrondi à  $10^{-5}$  près) donc on peut choisir  $x_0 = 1,99903$ .

**b)** On lit dans la fenêtre algèbre l'ordonnée du point M construit :  $f(1,99903) = 10\,314,28$  et on constate que  $f(1,99903) > 10\,200$ .

## Travaux Pratiques

### TP 1 Formes indéterminées, limites à déterminer

On découvre ici, sur quelques exemples, ce que l'on appelle une forme indéterminée. Puis on guide les élèves pas à pas pour leur faire découvrir la méthode de détermination des limites des fonctions polynômes (partie A) et rationnelles (partie B) à l'infini.

**A 1 a) i)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ,  $f(x) + g(x) = 2x - 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$ .

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ,  $f(x) + g(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 3$ .

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ,  $f(x) + g(x) = -3x + 6$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$ .

**b)** Dans chacun des cas précédents la limite de  $f$  est  $+\infty$ , celle de  $g$  est  $-\infty$  mais celle de  $f + g$  est tour à tour  $+\infty$ , 3 et  $-\infty$ .

Sachant qu'une fonction tend vers  $+\infty$  et une autre vers  $-\infty$ , on ne peut pas en déduire la limite de leur somme.

**c)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

$h(x) = 3x^2 - x + 5$ . Les théorèmes du cours ne permettent pas de donner la limite de  $h$  en  $+\infty$ .

**2 a)** Pour  $x \neq 0$ ,  $h(x) = x^2 \left( 3 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

**3 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x + 4) = -\infty$ . Donc la limite en  $+\infty$  de  $h$  est une forme indéterminée.

Pour  $x \neq 0$ ,  $h(x) = x^3 \left( 1 - \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^2 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-6x + 4) = +\infty$ . Donc la limite en  $-\infty$  de  $h$  est une forme indéterminée.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ .

**B 1 a) i)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} = x + 2$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ .

**ii)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3x+1}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**iii)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} = 5$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$ .

**b)** Dans chacun des cas précédents les limites de  $f$  et  $g$  sont égales à  $+\infty$  mais celle de  $\frac{f}{g}$  vaut tour à tour  $+\infty$ , 0 et 5.

Sachant que deux fonctions tendent vers  $+\infty$ , on ne peut pas en déduire la limite de leur quotient.

**c) •**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

•  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{-x + 5}$ . On ne peut pas donner la limite de  $h$  en  $+\infty$  à l'aide des théorèmes du cours.

**2 a)** Pour  $x \neq 0$ ,  $h(x) = \frac{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( -1 + \frac{5}{x} \right)} = \frac{x \left( 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\left( -1 + \frac{5}{x} \right)}$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{5}{x} \right) = -1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ .

**3 a) •**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ .

• Pour  $x \neq 0$ ,  $h(x) = \frac{x \left( -1 + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{-1 + \frac{3}{x}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{3}{x} \right) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 3) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ . On est donc encore dans le cas d'une forme indéterminée.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 + \frac{3}{x} \right) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ .

## TP 2 Horloge à quartz

Dans ce TP, on interprète une représentation graphique en termes de limites. Dans le contexte proposé, la notion de seuil se traduit concrètement par l'intervalle de valeurs à donner à une variable (la fréquence du signal) pour imposer une précision donnée à une horloge à quartz.

**1**  $\lim_{\substack{f \rightarrow f_p \\ f < f_p}} R(f) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{f \rightarrow f_p \\ f > f_p}} R(f) = +\infty$ .

**2 a)**  $I = [32\,767 ; 32\,768[$ .

**b) •** L'erreur maximale commise par l'horloge lorsqu'elle décompte 1 seconde est  $\frac{1}{32768} \approx 0,000031$  s.

• Il y a 86 400 secondes dans 24 heures. L'erreur maximale en une journée est  $\frac{86400}{32768} \approx 2,637$  s.

**3 a)**  $I = [32\,767,65 ; 32\,768[$ .

• L'erreur maximale commise par l'horloge lorsqu'elle décompte 1 seconde est  $\frac{0,35}{32768} \approx 0,000011$  s.

• L'erreur maximale en une journée est  $\frac{86400 \times 0,35}{32768} \approx 0,923$  s.

**b)**  $\lim_{\substack{f \rightarrow f_p \\ f < f_p}} R(f) = -\infty$  donc pour tout réel  $A$ , on peut trouver un réel  $f_0$  tel que pour tout  $f$  appartenant à

$$[f_0; f_p[, R(f) < A.$$

## Exercices

**2 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

**b)** La courbe représentative de la fonction  $g$  admet l'axe des abscisses pour asymptote en  $-\infty$  et la droite d'équation  $y = -2$  pour asymptote en  $+\infty$ .

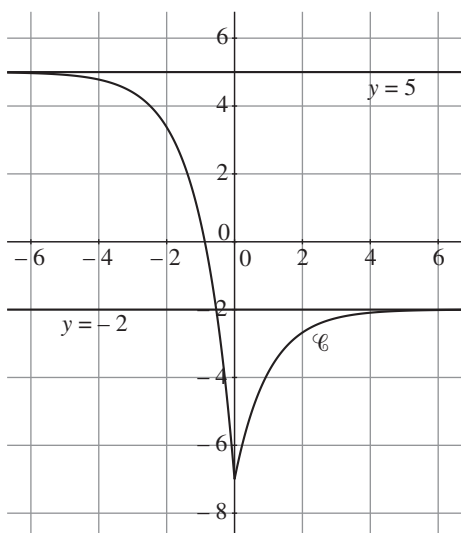
**3 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**b)** La courbe représentative de la fonction  $g$  admet l'axe des abscisses pour asymptote en  $+\infty$  et la droite d'équation  $y = 4$  pour asymptote en  $-\infty$ .

**5 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ . La

courbe représentative de la fonction  $f$  admet la droite d'équation  $y = 5$  pour asymptote en  $-\infty$  et la droite d'équation  $y = -2$  pour asymptote en  $+\infty$ .

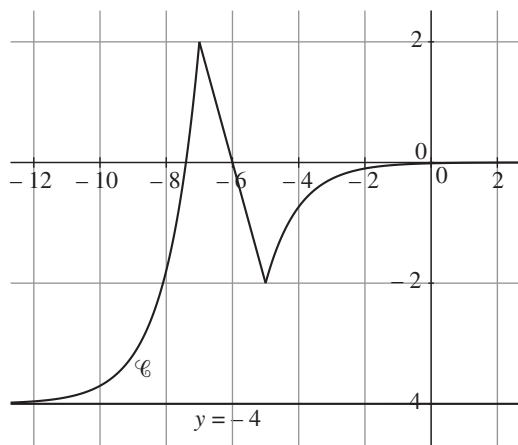
**b)**



**6 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . La

courbe représentative de la fonction  $f$  admet la droite d'équation  $y = -4$  pour asymptote en  $-\infty$  et l'axe des abscisses pour asymptote en  $+\infty$ .

**b)**

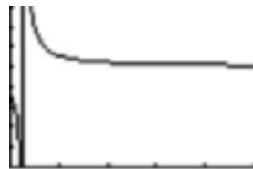


**8 1.** Les valeurs de  $f(x)$  sont données à  $10^{-4}$  près.

$x$	100	1000	10 000
$f(x)$	5,04124	5,0040	5,0004

Il semble que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ .

On peut faire la même conjecture à partir de la représentation graphique de  $f$ :



$$\begin{aligned} \mathbf{2. a)} \quad |f(x) - 5| &= \left| \frac{5x - 11}{x - 3} - 5 \right| = \left| \frac{4}{x - 3} \right| \\ &= \frac{4}{x - 3} \text{ car } x - 3 > 0 \text{ sur } ]3; +\infty[. \end{aligned}$$

**b)** Pour  $x$  appartenant à  $]3; +\infty[$ ,

$$\frac{4}{x-3} < 10^{-5} \Leftrightarrow x > 400003$$

$$x_5 = 400\,003.$$

**c)** Pour  $x$  appartenant à  $]3; +\infty[$ ,

$$\frac{4}{x-3} < 10^{-p} \Leftrightarrow x > 4 \times 10^p + 3.$$

$$x_p = 4 \times 10^p + 3.$$

**d)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5.$

**10 a)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty ;$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty.$$

**b)** La courbe représentative de la fonction  $g$  admet la droite d'équation  $x = -4$  pour asymptote.

**11 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 ;$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty.$$

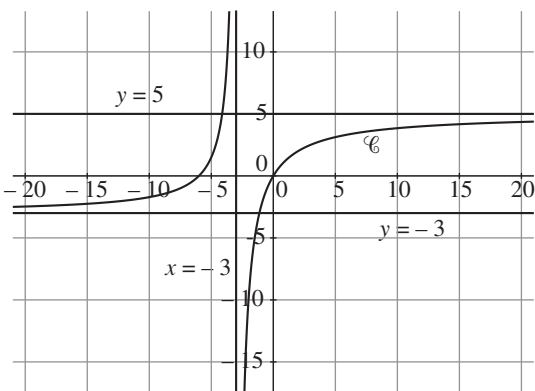
**b)** Les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $g$  ; la droite d'équation  $y = 4$  est asymptote à la courbe représentative de  $g$  en  $+\infty$ .

**13 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 ;$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty.$$

Les droites d'équation  $y = -3$  et  $y = 5$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $f$  respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$ . La droite d'équation  $x = -3$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**b)**

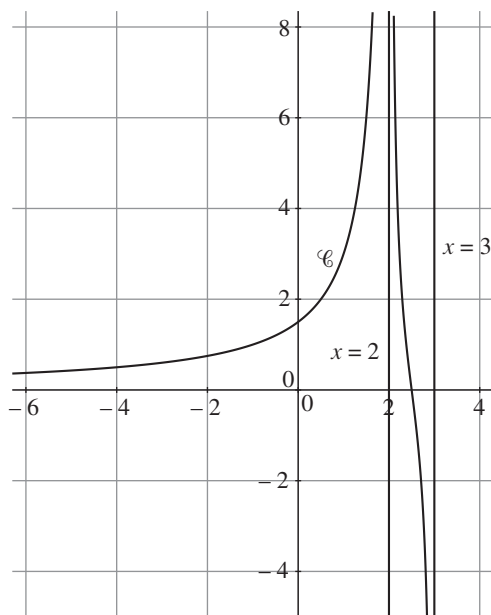


**14 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty ;$

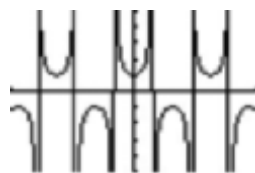
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty.$$

Les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 3$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $f$ . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

**b)**



**15 1. a)**



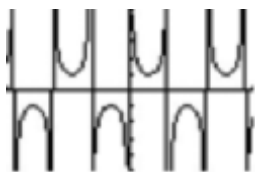
**b)** Il semble que la courbe représentative de  $f$  admette plusieurs asymptotes verticales.

**2. a)**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**b)**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} f(x) = -\infty$

suivant le signe de  $\cos x$  donc la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**16 1. a)**



**b)** Il semble que la courbe représentative de  $f$  admette plusieurs asymptotes verticales.

**2. a)**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**b)**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = -\infty$  suivant le signe de  $\sin x$  donc la droite d'équation  $x = k\pi$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**17 1.**  $f'(x) = \frac{3}{(5-x)^2} > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 5[$ .

**2. a)**

$x$	4,99	4,98	4,97	4,96	4,95
$f(x)$	300	150	100	75	60

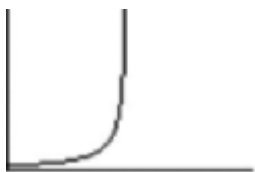
$x$	4,999	4,998	4,997	4,996	4,995
$f(x)$	3 000	1 500	1 000	750	600

$x$	4,9999	4,9998	4,9997	4,9996	4,9995
$f(x)$	30 000	15 000	10 000	7 500	6 000

Pour avoir  $f(x) > 10^4$ , on peut prendre  $x$  dans  $]4,9997; 5[$ .

**b)** Il semble que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$ .

On la retrouve sur la représentation graphique de  $f$ :



**3. a)** Pour tout  $x < 5$ ,

$$\frac{3}{5-x} > 10^k \Leftrightarrow x > 5 - 3 \times 10^{-k}.$$

Pour que  $f(x) > 10^k$ , on peut prendre  $x$  dans  $]5 - 3 \times 10^{-k}; 5[$ .

Pour la question **2. a)**, on a :  $5 - 3 \times 10^{-4} = 4,9997$ .

**b)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$ .

**18 1.**  $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

**2. a)** Les valeurs de  $f(x)$  sont données à l'entier près.

$x$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	-40	-20	-13	-10	-8

$x$	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
$f(x)$	-400	-200	-133	-100	-80

$x$	1,001	1,002	1,003	1,004	1,005
$f(x)$	-4 000	-2 000	-1 333	-1 000	-800

Pour avoir  $f(x) < -10^3$ , on peut prendre  $x$  dans  $]1; 1,004[$ .

**b)** Il semble que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ .

On la retrouve sur la représentation graphique de  $f$ :



**3. a)** Pour tout  $x > 1$ ,

$$\frac{4}{1-x} < -10^k \Leftrightarrow x < 1 + 4 \times 10^{-k}.$$

Pour que  $f(x) < -10^k$ , on peut prendre  $x$  dans  $]1; 1 + 4 \times 10^{-k}[$ .

Pour la question **2. b)** on a :  $1 + 4 \times 10^{-3} = 1,004$ .

**b)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ .

**20 a)** C'est  $h$  qui est représentée.

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} h(x) = +\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} h(x) = +\infty$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$ .

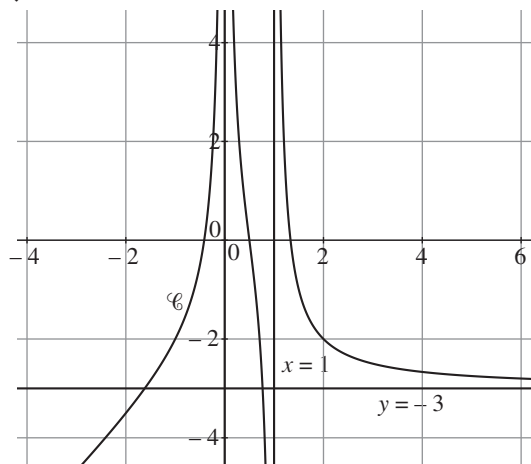
**22 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ .

Les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $f$ . La droite d'équation  $y = -3$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

b)



**24** 1.  $f'(x) = \frac{-x^2 - 100}{x^2}$  ; pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f$	↘	

**2. a)** Les valeurs de  $f(x)$  sont données à  $10^{-1}$  près.

$x$	100	200	300	...	900	1000	1 100
$f(x)$	-99	-199,5	-299,7	...	-899,9	-999,9	-1 099,9

**b)** Pour  $x > 1\,100$ ,  $f(x) < -10^3$ .

**c)** Pour  $x > 105\,000$ ,  $f(x) < -10^5$ .

**d)** Il semble que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**2. a)**  $\frac{100 - x^2}{x} = -10^k \Leftrightarrow x = \frac{10^k + \sqrt{10^{2k} + 400}}{2}$

ou  $x = \frac{10^k - \sqrt{10^{2k} + 400}}{2}$ .

La fonction  $f$  étant strictement décroissante sur

$]0; +\infty[$ , pour tout  $x > \frac{10^k + \sqrt{10^{2k} + 400}}{2}$ ,  $f(x) < -10^k$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**26 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  ; **b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{20} = +\infty$  ; **d)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$  ;

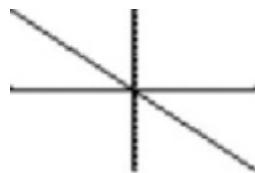
**e)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2012} = +\infty$ .

**28**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;

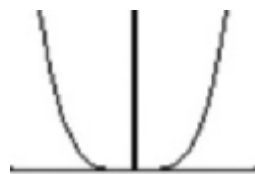
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ .

Représentation de  $f$ , avec  $X$  entre  $-10$  et  $10$  et  $Y$  entre  $-20$  et  $20$  :



Représentation de  $g$ , avec  $X$  entre  $-10$  et  $10$  et  $Y$  entre  $0$  et  $10\,000$  :



Représentation de  $h$  avec  $X$  entre  $0$  et  $1000$  et  $Y$  entre  $-100$  et  $0$  :



**30 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 7 - 3\sqrt{x}) = -\infty$  ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x^3 + 2) = +\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2 - 2\sqrt{x}) = -\infty$ .

**32 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 2x)^3 = +\infty$  ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 5x + 1)^2 = +\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2)^5 = -\infty$ .

**34 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$  ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3)(3x^2 - 1)^3 = -\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x + 3)^2(5x + 9) = -\infty$ .

**36 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$  ; **b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$  ;

**c)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$  ; **d)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0$  ;

**e)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^5} = -\infty$ .

**37 a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ; **b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ .

$$\textbf{39 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3-5x} = 0 ;$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3 ;$$

$$\textbf{c)} \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{1}{2x-10} = -\infty ;$$

$$\textbf{d)} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{-2x+4} = +\infty .$$

$$\textbf{41 a)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 .$$

$$\textbf{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty .$$

$$\textbf{43 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty .$$

**c)** La droite d'équation  $x = 3$  est asymptote à la courbe représentative de  $g$ . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $g$  en  $-\infty$ .

$$\textbf{44 a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty .$$

**c)** La droite d'équation  $x = 4$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\textbf{45 a)} \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty .$$

**c)** Les droites d'équations  $x = -4$  et  $x = 4$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

$$\textbf{46 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty .$$

**c)** La droite d'équation  $x = -2$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

$$\textbf{47 a)} \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = +\infty .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty .$$

**c)** Les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 2$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $g$ .

$$\textbf{49 a)} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x-1}{-x^2+x+2} = -\infty ;$$

$$\textbf{b)} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x-1}{-x^2+x+2} = +\infty ;$$

$$\textbf{c)} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{2x-1}{-x^2+x+2} = -\infty ;$$

$$\textbf{d)} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x-1}{-x^2+x+2} = +\infty ;$$

$$\textbf{51 a)} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty ;$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\infty ;$$

$$\textbf{c)} \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty ;$$

$$\textbf{d)} \lim_{x \rightarrow 1} k(x) = -\infty .$$

$$\textbf{52} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty . \text{ La représentation de } f \text{ est } C_2 .$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} g(x) = +\infty . \text{ La représentation de } g \text{ est } C_3 .$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} h(x) = -\infty . \text{ La représentation de } h \text{ est } C_1 .$$

$$\textbf{54 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty .$$

$$\textbf{55 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty .$$

$$\textbf{57 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$\textbf{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty .$$

$$\textbf{58 a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

$$\textbf{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{4}{3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{4}{3} .$$

$$\textbf{59} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 . \text{ La représentation graphique de } f \text{ est } C_2 .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty . \text{ La représentation graphique de } g \text{ est } C_4 .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 . \text{ La représentation graphique de } h \text{ est } C_1 .$$

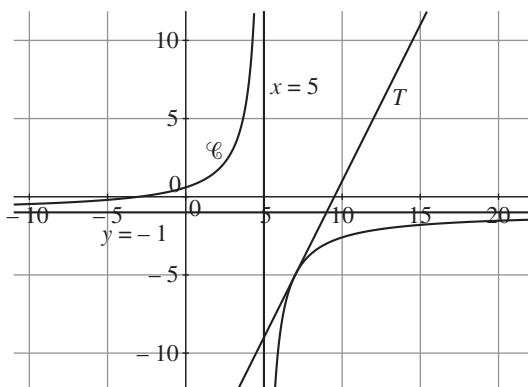
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = -\infty . \text{ La représentation graphique de } i \text{ est } C_3 .$$

$$\textbf{61 a)} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \text{ la droite d'équation } x = 5 \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f .$$

$$\textbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$



- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$ .  
e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$  ; la droite d'équation  $x = -4$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  ; l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .  
f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ; la droite d'équation  $x = \frac{4}{3}$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .  
g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .  
h)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  ; l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de  $f$  ; la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .  
i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ; l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$  ; la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .



**66 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x > -5}} f(x) = -\infty$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$ .

c)  $C$  admet pour asymptotes : la droite d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ; les droites d'équations  $x = -5$  et  $x = 3$ .

2. a) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-5 ; 3\}$ ,

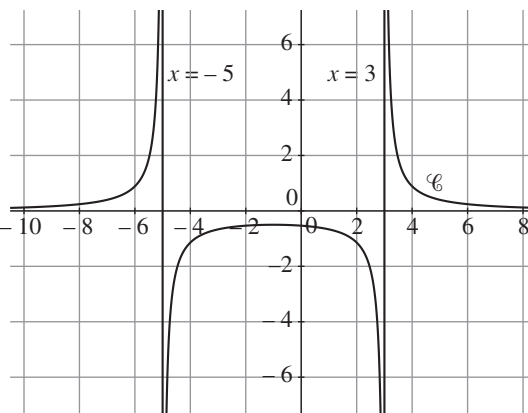
$$f'(x) = \frac{-16(x+1)}{((x-3)(x+5))^2}.$$

$f'(x) > 0$  sur  $]-\infty ; -5[ \cup ]-5 ; -1[$  ;  $f'(x) < 0$  sur  $]-1 ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[$ .

b)

$x$	$-\infty$	$-5$	$-1$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+ 0 -		-
$f$	0	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	0

3. La représentation ci-dessous n'est pas faite à l'échelle demandée.



## Problèmes

**65 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ .

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = -\infty$ .

c)  $C$  admet pour asymptotes la droite d'équation  $y = -1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et la droite d'équation  $x = 5$ .

2. a) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ ,  $f'(x) = \frac{8}{(5-x)^2}$  ;  $f'(x) > 0$ .

b)

$x$	$-\infty$	$5$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f$	$-1$	$+\infty$	$-1$

3. a)  $f(7) = 2$  ; le coefficient directeur de  $T$  est 2.

b) La représentation ci-après n'est pas faite à l'échelle demandée.

**67** 1. Il semble que :

a) l'axe des ordonnées soit asymptote à  $C$  ; la droite d'équation  $y = 1$  soit asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .  
*Remarque : Les conjectures faites par les élèves peuvent être différentes (par exemple asymptote d'équation  $y = 0,8$ ), ce sont des conjectures acceptables et il est intéressant à l'occasion de ce problème d'insister sur le fait que la lecture graphique permet de faire des conjectures, pas de démontrer un résultat.*

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

*Remarque : L'objectif ici est que les limites écrites soient cohérentes avec les conjectures émises au a).*

c)  $C$  soit au-dessus de  $\mathcal{D}$  lorsque  $0 < x \leq 1,5$  ;  $C$  soit en dessous de  $\mathcal{D}$  lorsque  $x \geq 1,5$ .

d)  $f$  soit décroissante sur  $]0 ; 3[$  ;  $f$  soit croissante sur  $]3 ; +\infty[$ .

2. La conjecture est confirmée par le calcul de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

3. a)  $g(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = \frac{-8x + 12}{x^2}$ .

b)

$x$	0	3/2	$+\infty$
$g(x)$		+	-

c) Lorsque  $0 < x \leq 1,5$ ,  $g(x) > 0$  soit  $f(x) > 1$  donc  $C$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$ .

Lorsque  $x \geq 1,5$ ,  $g(x) < 0$  soit  $f(x) < 1$  donc  $C$  est en dessous de  $\mathcal{D}$ .

La conjecture est confirmée.

4. a)  $f'(x) = \frac{8(x-3)}{x^3}$ .

b)

$x$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$+\infty$		1
		$-1/3$	

**68** 1. a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = -2$  est asymptote à  $C$ .

b)  $c = 2$ .

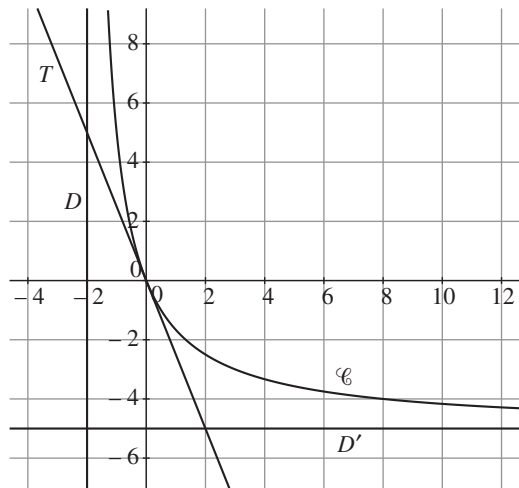
2. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$  donc la droite d'équation  $y = -5$  est asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .

b)  $a = -5$ .

3.  $f(x) = -5 + \frac{b}{x+2}$  ; or  $f(0) = 0$  donc  $b = 10$ .

4. a)  $f'(x) = -\frac{10}{(x+2)^2}$  ;  $f'(0) = -\frac{5}{2}$  ; le coefficient directeur de  $T$  est  $-\frac{5}{2}$ .

b) La représentation ci-dessous n'est pas faite à l'échelle demandée.



**69** 1. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^3 + bx + c}{x^3} = a$  donc  $a = 2$ .

2. a)  $f(-1) = 0$  d'où  $b - c + 2 = 0$ .

b)  $f'(x) = \frac{(6x^2 + b)x^3 - (2x^3 + bx + c) \times 3x^2}{x^6}$   
 $= \frac{-2bx^3 - 3cx^2}{x^6} = \frac{-2bx - 3c}{x^4}$ .

c) Le coefficient directeur de  $T$  est  $\frac{-7-0}{0-(-1)} = -7$

et  $f'(-1) = 2b - 3c$  d'où  $2b - 3c = -7$ .

d)  $b = 1$  ;  $c = 3$ .

3. L'axe des ordonnées semble être asymptote à  $C$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

**70** a)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ .

b)  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+2)}$ .

**71** a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + px + q$ .


$f'(x) = 3x^2 + p$ . Or  $p \geq 0$  donc  $f'(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 Donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . D'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

Il existe donc bien un unique réel  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Autrement dit, l'équation  $x^3 + px + q = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

**b)** Si  $p = -1$  et  $q = 0$ ,  $x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$ . L'équation a donc 3 solutions (0 ; -1 et 1).

**72 1. a)**  ch2\_pb72.ggb.

**b)** Il semble que : • lorsque  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;

• lorsque  $a < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**c)** A(1 ; 3).

**2.** Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x^3 \left( -a + \frac{3}{x^2} + \frac{a}{x^3} \right)$ , d'où les résultats suivants :

**a)** • Lorsque  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;

• lorsque  $a < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)** • Lorsque  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;

• lorsque  $a < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**3.** Pour tout réel  $a$ ,  $f_a(1) = 3$  donc  $C_a$  passe par A(1 ; 3).

**73 1. a) b)**  ch2\_pb73.ggb.

L'aire hachurée semble tendre vers 2 lorsque  $M$  s'éloigne de  $O$ .

**c)** La courbe sur laquelle se déplace  $N$  semble avoir la droite d'équation  $y = 2$  pour asymptote en  $+\infty$ , ce qui confirme la conjecture.

**2. a)**  $A_1(x) = x^2$ .

**b)**  $OM' = \frac{1}{x}$  ;  $A_2(x) = \left( x + \frac{1}{x} \right)^2$ .

**c)**  $A_2(x) - A_1(x) = \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - x^2 = 2 + \frac{1}{x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) = 2$ , ce qui confirme la conjecture.

**3. a)** Aire de  $OMPQ = x^2$  ; aire de  $M'OQR = 1$  ;  
aire de  $P'PQS = 1$  ; aire de  $QRQ'S = \frac{1}{x^2}$ .

**b)** L'aire du carré  $QRQ'S$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$  donc l'aire de la partie hachurée tend vers la somme des aires des deux rectangles, soit 2.

**74 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)** La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à  $C$ .

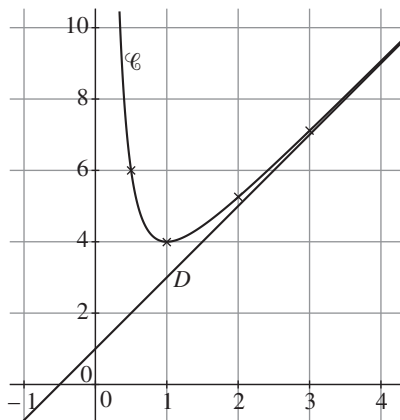
**2. a)**  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$  or

$2(x-1)(x^2 + x + 1) = 2(x^3 - 1)$  d'où le résultat.

**b)** Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $x^3$  et  $x^2 + x + 1$  sont strictement positifs, donc  $f'(x)$  est du signe de  $(x-1)$ .

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f$	$+\infty$		4	$+\infty$

**3. a) b)** La représentation ci-dessous n'est pas faite à l'échelle demandée.



Pour les « grandes » valeurs de  $x$ ,  $C$  et  $D$  semblent de plus en plus proches.

**4. a)**  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

**c)**  $C$  est située au-dessus de  $D$  car :  $f(x) - (2x + 1) > 0$  soit  $f(x) > 2x + 1$ .

**d)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . Cet écart tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**5. a)**  $g(x) < 0,05 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{5}$ .

**b)** L'unité en ordonnée étant 1 cm, l'écart est inférieur à 0,05 cm dès que  $x > 2\sqrt{5}$  soit environ à partir de 4,5.

**75 1. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ .

**b)**  $|z(t)| < 0,002$  lorsque  $t > 1,25$ .

La suspension n'est pas valide car au bout d'une seconde, la position de la masse par rapport à la position au repos est supérieure à 2 mm.

**2. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ .

**b)**  $|z(t)| < 0,002$  lorsque  $t > 1$ .

La suspension est valide car à partir d'une seconde, la position de la masse par rapport à la position au repos est inférieure à 2 mm.

**76 1. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 3,6$ .

**b) •**  $t_0 = 0,6$  s.

**•**  $t_1 = 1$  s.

**•**  $t_2 = 1,3$  s.

**2. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$ .

**b) •**  $t'_0 = 0,74$  s.

**•**  $t'_1 = 0,95$  s.

**3. a)** Il semble que  $C_1$  et  $D_1$  se rapprochent de plus en plus.

**b)**  $t''_0 = 0,8$  s.

**77 a)**  $\lim_{f \rightarrow 0} |\underline{Z}(f)| = +\infty$  (les grandeurs  $f$  et  $C$  sont strictement positives) et  $\lim_{f \rightarrow +\infty} |\underline{Z}(f)| = 0$ .

**b)**  $\lim_{f \rightarrow 0} |\underline{Z}(f)| = +\infty$  donc pour les fréquences faibles, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

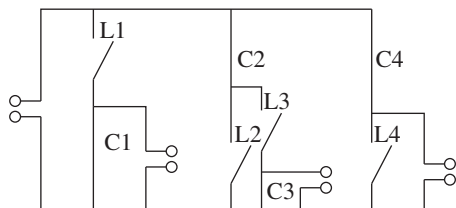
**c)**  $\lim_{f \rightarrow +\infty} |\underline{Z}(f)| = 0$  donc pour les fréquences très élevées, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.

**2. a)**  $\lim_{f \rightarrow 0} |\underline{Z}(f)| = 0$  et  $\lim_{f \rightarrow +\infty} |\underline{Z}(f)| = +\infty$ .

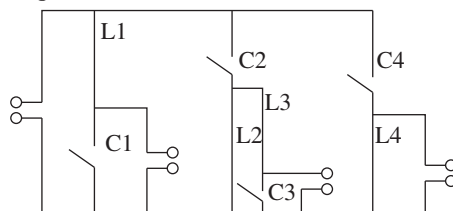
**b)**  $\lim_{f \rightarrow 0} |\underline{Z}(f)| = 0$  donc pour les fréquences faibles, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.

**c)**  $\lim_{f \rightarrow +\infty} |\underline{Z}(f)| = +\infty$  donc pour les fréquences très élevées, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

**3. a)** Fréquences très élevées :



**b)** Fréquences faibles :



**c)** Haut parleur des aigus : HP3. Haut parleur des graves : HP1. Haut parleur médium : HP2.

## Vers le Bac

**78 1. a)**

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{3x-1}{x^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x-1) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ avec } x^2 > 0 \text{ sur } ]0; +\infty[ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-1}{x^2} = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

**c)** La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à  $C$ . La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .

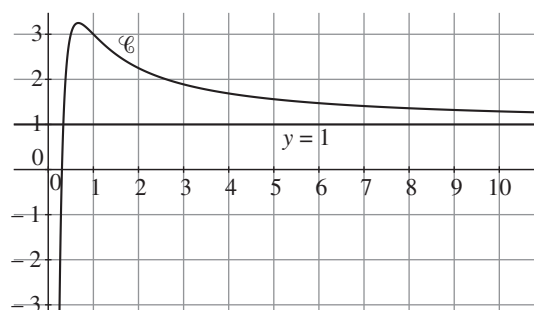
**2. a)**  $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-3x+2}{x^3}.$

$x^3 > 0$  sur  $]0; +\infty[$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-3x+2$ .

**b)**

$x$	0	$2/3$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$	$-\infty$	$13/4$	1

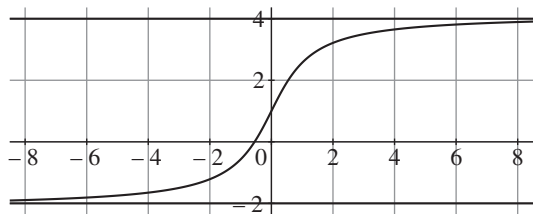
**3.** La représentation ci-dessous n'est pas faite à l'échelle demandée.



**79** 1. Vrai. Les droites d'équations  $x = -1$  et  $y = 2$  en  $+\infty$ .

2. Faux. Contre exemple :  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - x$ .

3. Faux. Contre exemple : fonction dont la courbe est donnée ci-dessous :



4. Faux. Pour  $x \neq 0$ ,  $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty$ .

5. Vrai. On a :  $\lim_{x \rightarrow 5} (-x + 5) = 0$  et  $-x + 5 < 0$  car  $x > 5$ .

6. Vrai. On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 7 = -\infty$  et 2012 est pair.

**80** 1. a)  $C_1 : i$  ;  $C_2 : f$  ;  $C_3 : g$  ;  $C_4 : h$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$  ;

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1} i(x) = -\infty$ .

$$\begin{aligned} 2. a) \alpha(x) &= 4 + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{4(x-1)^2 + 1 - (x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 9x + 6}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = +\infty$  ; donc  $C_1$  n'est pas la courbe représentative de  $\alpha$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 4$  ; donc  $C_3$  est la courbe représentative de  $\alpha$ .

c) Graphiquement : on peut supposer que  $C_3$  est au-dessus de  $D$  lorsque  $1 < x < 2$  et en dessous lorsque  $x > 2$ .

Par le calcul :

$$\alpha(x) - 4 = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2-x}{(x-1)^2} ;$$

donc  $\alpha(x) - 4 > 0$  lorsque  $1 < x < 2$  et  $\alpha(x) - 4 < 0$  lorsque  $x > 2$  ce qui confirme la conjecture.

**81** a) Faux :  $f$  est définie en 0.

b) Faux : elle n'en a que 2.

c) Vrai :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et d'après le tableau de variation  $f(x) > 0$  sur  $]-\infty ; -2[$ .

d) Vrai :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$  et 5 est impair.

e) Faux : elle n'en a que 2.

## 3

## Dérivées et primitives

## Activités

## Activité 1

Sur une situation concrète et simple, on introduit la notion de primitive et on fait ici trouver aux élèves des primitives de fonctions. On remarque que l'on n'a pas unicité des primitives, mais que la connaissance de la situation à un instant donné (ici, au départ), permet de déterminer la primitive cherchée : vitesse à partir de l'accélération et de la vitesse à l'origine, distance parcourue à partir de la vitesse initiale et de la distance parcourue à l'instant 0 dans la partie A, à l'instant 6 dans la partie B. On utilise ces primitives pour trouver le temps mis par le coureur, connaissant son « schéma » de course.

**A 1 a)**  $f(t) = 1,4t$ .

**b)** On a  $v'(t) = 1,4$  et  $v'(t) = m$  donc  $m = 1,4$ .

**c)** Toutes les fonctions de la forme  $t \mapsto 1,4t + p$  sont des primitives de  $a$ .  
 $v(0) = p = 4,5$ , d'où  $v(t) = 1,4t + 4,5$ .

**2 a)**  $g(t) = t^2$  ;  $h(t) = \frac{1}{2}t^2$ .

**b)** On a  $x'(t) = 2\alpha t + \beta = 1,4t + 4,5$ . On peut donc prendre  $\alpha = 0,7$  et  $\beta = 4,5$ . On a alors  $x(t) = 0,7t^2 + 4,5t + \gamma$ .

**c)** Toutes les fonctions de la forme  $t \mapsto 0,7t^2 + 4,5t + \gamma$  sont des primitives de  $v$ .  
 On a  $x(0) = \gamma = 0$ . D'où  $x(t) = 0,7t^2 + 4,5t$ .

**3 a)**  $v(6) = 12,9$ .

**b)**  $x(6) = 52,2$ .

**B 1** Pour  $t \geq 6$ ,  $v(t) = 12,9 = x'(t)$ . On peut donc écrire  $x(t) = 12,9t + p'$ , où  $p'$  est une constante réelle.

En utilisant  $x(6)$ , on a :  $x(6) = 12,9 \cdot 6 + p' = 77,4 + p' = 52,2$ , d'où  $p' = -25,2$ .

Conclusion :  $x(t) = 12,9t - 25,2$ .

**2** On cherche  $t$  tel que  $x(t) = 100$ . Le sprinter passe la ligne d'arrivée à l'instant  $t = \frac{125,2}{12,9} \approx 9,71$  (arrondi au centième de seconde près).

## Activité 2

Pour un travail plus complet sur les dérivées des fonctions usuelles, on peut utiliser le « mémento » page 318.

Dans cette activité, on détaille le « retournement » du tableau des dérivées et les élèves aboutissent ainsi, par un travail guidé, au tableau des primitives usuelles. À tout moment dans cette activité, on peut demander aux élèves de donner plusieurs réponses quand on cherche une primitive, pour bien mettre en évidence la non-unicité de la primitive d'une fonction donnée.

**1 a)** La dérivée de  $x \mapsto x$  est  $x \mapsto 1$ . La fonction  $G(x) = x$  convient.

**b)** Si  $u(x) = x^2$ , alors  $u'(x) = 2x$ . Si  $v(x) = \frac{x^2}{2}$  alors  $v'(x) = x$ . On peut donc choisir  $G(x) = v(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**c)** Si  $u(x) = x^3$  alors  $u'(x) = 3x^2$ . Si  $v(x) = \frac{x^3}{3}$  alors  $v'(x) = x^2$ . On peut donc choisir  $G(x) = v(x) = \frac{x^3}{3}$ .

**d)** Pour que la dérivée soit de degré  $n$ , il « faut » que la fonction soit de degré  $n + 1$ .

Si  $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  alors  $v'(x) = x^n$ . On peut donc choisir  $G(x) = v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .

**e)** Une primitive de la fonction  $x \mapsto x^5$  est la fonction  $x \mapsto \frac{x^6}{6}$ .

Une primitive de la fonction  $x \mapsto x^7$  est la fonction  $x \mapsto \frac{x^8}{8}$ .

**2 a)**  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ . Si  $g(x) = \frac{1}{x^2} = f'(x)$ , alors une primitive  $G$  de  $g$  est définie par  $G(x) = f(x) = -\frac{1}{x}$ .

**b)**  $f'_1(x) = -\frac{2}{x^3}$  et  $f'_2(x) = \frac{1}{x^3}$  donc une primitive  $G$  de  $g$  est définie par  $G(x) = f_2(x) = -\frac{1}{2x^2}$ .

**c)**  $f'(x) = -\frac{1}{(n-1)} \times \left(-\frac{n-1}{x^n}\right) = \frac{1}{x^n}$ . Donc une primitive  $G$  de  $g$  est définie par :

$$G(x) = f(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

**d)** Une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^5}$  est la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{4x^4}$ .

Une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^8}$  est la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{7x^7}$ .

**3 a)**  $f'(x) = \cos x$ . Une primitive  $G$  de  $g$  est définie par  $G(x) = f(x) = \sin x$ .

**b)**  $f'(x) = \sin x$ . Une primitive  $G$  de  $g$  est définie par  $G(x) = f(x) = -\cos x$ .

**4**

La fonction $F$ définie par	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , où $n$ est un entier naturel	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$F(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
est UNE primitive de				
la fonction $f$ définie par	$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n$ est un entier strictement supérieur à 1	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$

Dans ce TP, on part de l'utilisation des formules des primitives de  $u'u^n$  et  $\frac{u'}{u^n}$  telle qu'elle a été vue dans le SF5 pour guider les élèves vers l'utilisation de ces formules dans le cas où il y a une constante à factoriser ou dans le cas où « il manque » une constante pour avoir exactement la formule du cours. C'est une difficulté supplémentaire pour les élèves et c'est pourquoi elle est traitée ici en détail pour les produits d'abord, dans la partie A, puis pour les quotients dans la partie B.

**A 1 a)**  $n = 3$  et  $u(x) = x^2 + 6x - 7$ .

**b)**  $u'(x) = 2x + 6$ .

**c)** On a bien  $f(x) = u'(x)(u(x))^n$ .

**d)** Une primitive de  $f$  est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{3+1}(x^2 + 6x - 7)^{3+1} = \frac{1}{4}(x^2 + 6x - 7)^4$ .

Remarque : certains élèves, pour être « convaincus », ont besoin de calculer la dérivée de  $F$ . On peut, après leur avoir fait rappeler la formule de dérivation à utiliser, les inciter à faire cette vérification.

**2 a)**  $n = 4$  et  $u(x) = x^2 + 4x + 5$ .

**b)**  $u'(x) = 2x + 4$ . La fonction  $g$  n'est pas de la forme  $u'u^n$ , mais on a  $(6x + 12) = 3(2x + 4)$ .

**c)** On a  $g(x) = 3u'(x)(u(x))^n$ , donc une primitive de  $g$  est la fonction  $G$  définie par :

$$G(x) = 3 \cdot \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} = \frac{3}{5}(x^2 + 4x + 5)^5.$$

Remarque : ici encore, pour certains élèves, il peut être utile de faire rappeler la formule de dérivation de  $u^5$  puis de faire calculer la dérivée de  $G$ .

**3** La fonction  $h$  est un produit. Si l'on cherche la forme  $u'u^n$ , on pose  $n = 3$  et  $u(x) = 2x^2 + 6x - 7$  ; on a alors  $u'(x) = 4x + 6$  et on peut écrire  $h(x) = 5u'(x)u(x)^3$ . Une primitive de  $h$  est alors la fonction  $H$  définie par  $H(x) = \frac{5}{4}(2x^2 + 6x - 7)^4$ .

La fonction  $i$  est un produit. Si l'on cherche la forme  $u'u^n$ , on pose  $n = 999$  et  $u(x) = x^3 + 1$  ; on a alors  $u'(x) = 3x^2$  et on peut écrire  $i(x) = \frac{1}{3}u'(x)(u(x))^{999}$ . Une primitive de  $i$  est alors la fonction  $I$  définie par  $I(x) = \frac{1}{3000}(x^3 + 1)^{1000}$ .

La fonction  $j$  est un produit. Si l'on cherche la forme  $u'u^n$ , on pose  $n = 4$  et  $u(x) = \cos x$  ; on a alors  $u'(x) = -\sin x$  et on peut écrire  $j(x) = -u'(x)(u(x))^4$ . Une primitive de  $j$  est alors la fonction  $J$  définie par  $J(x) = -\frac{1}{5}\cos^5 x$ .

**B 1 a)**  $n = 3$  et  $u(x) = x^2 + 7$ .

**b)**  $u'(x) = 2x$ .

**c)** On a bien  $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^n}$ .

**d)** Une primitive de  $f$  est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 7)^2}$ .

**2 a)**  $n = 2$  et  $u(x) = x^4 + 2$ .

**b)**  $u'(x) = 4x^3$ . La fonction  $g$  n'est pas de la forme  $\frac{u'}{u^n}$ , mais on a  $x^3 = \frac{1}{4}u'(x)$ .

**c)** On a  $g(x) = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , donc une primitive de  $g$  est la fonction  $G$  définie par :

$$G(x) = \frac{1}{4} \times \left( -\frac{1}{(2-1)(u(x))^{2-1}} \right) = -\frac{1}{4(x^4 + 2)}.$$



❸ La fonction  $h$  est un quotient. Si l'on cherche la forme  $\frac{u'}{u^n}$ , on pose  $n = 3$  et  $u(x) = 2x + 1$  ; on a alors  $u'(x) = 2$  et on peut écrire  $h(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{(u(x))^3}$ . Une primitive de  $h$  est alors la fonction  $H$  définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{2(2x+1)^2} \right) = -\frac{1}{4(2x+1)^2}.$$

La fonction  $i$  est un quotient. Si l'on cherche la forme  $\frac{u'}{u^n}$ , on pose  $n = 4$  et  $u(x) = x^3 + 8$  ; on a alors  $u'(x) = 3x^2$  et on peut écrire  $i(x) = \frac{1}{3} \frac{u'(x)}{(u(x))^4}$ . Une primitive de  $i$  est alors la fonction  $I$  définie par

$$I(x) = \frac{1}{3} \times \left( -\frac{1}{3(x^3+8)^3} \right) = -\frac{1}{9(x^3+8)^3}.$$

La fonction  $j$  est un quotient. Si l'on cherche la forme  $\frac{u'}{u^n}$ , on pose  $n = 5$  et  $u(x) = x^3 + 1$  ; on a alors  $u'(x) = 3x^2$  et on peut écrire  $j(x) = 2 \frac{u'(x)}{(u(x))^5}$ . Une primitive de

$$j \text{ est alors la fonction } J \text{ définie par } J(x) = 2 \times \left( -\frac{1}{4(x^3+1)^4} \right) = -\frac{1}{2(x^3+1)^4}.$$

## TP 2

Conformément aux thèmes transversaux proposés par le programme de STI2D et STL (spécialité SPCL), on traite dans ce TP d'un problème de « point de fonctionnement », avec le choix ici d'une résistance pour obtenir une puissance maximale. Il s'agit d'une application en électronique de la dérivation des fonctions puissances. La question est traitée dans ce TP avec des valeurs numériques. Le fait de travailler avec une fonction de la variable  $r$  représente une difficulté pour certains élèves. On peut prolonger ce travail avec le problème 87 dans lequel on traite la même question sous forme littérale, la difficulté alors étant de faire la distinction entre constantes et variable.

❶  $P = E^2 \frac{r}{(r+R)^2} = 10^{-2} \frac{r}{(r+75)^2}.$

❷ a) Pour tout  $r > 0$ , on a  $f(r) = 10^{-2} \frac{1}{r \left( 1 + \frac{75}{r} \right)^2}$ , d'où  $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 0$ . L'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

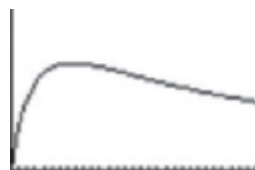
b)  $f'(r) = 10^{-2} \frac{75-r}{(r+75)^3}$ . Pour tout  $r \geq 0$ ,  $(r+75)^3 > 0$ , donc  $f'(r)$  est du signe de  $(75-r)$ .

c)

$r$	0	75	$+\infty$
$f'(r)$	+	0	-
$f$	0	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	0

d) Le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  est  $\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ , atteint pour  $r = 75$ .

e) La représentation ci-contre est obtenue en prenant  $X$  entre 0 et 300 et  $Y$  entre 0 et  $5 \times 10^{-5}$ . En utilisant la fonction « Trace », on contrôle la vraisemblance des résultats obtenus précédemment.



- 3 a)** Dans le cas étudié ici, on remarque que la puissance est maximale lorsque  $r = R$ .  
**b)** Cette puissance maximale est alors de  $3,3 \times 10^{-5} \text{ W}$  à  $10^{-6}$  près.

### TP 3

La confusion entre fonction, fonction dérivée et fonctions primitives, ainsi que entre signe et sens de variation est très répandue. C'est pour cela qu'une réflexion sur les représentations graphiques d'une fonction, de sa dérivée et de ses primitives peut aider certains élèves. Il s'agit dans ce TP d'un travail très guidé qui pourra être prolongé avec les problèmes 78 à 80.

- A 1 a)**  $F(-2) = 27$  car la courbe  $\mathcal{C}$  passe par A.  
**b)**  $F'(-2) = 0$  car la tangente à  $\mathcal{C}$  au point A a pour coefficient directeur 0.  
**c)**

$x$	-3	-2	1	2	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F$	16	27	0	11	

- 2 a)**  $F' = f$ .  
**b)**  $f(-2) = 0$ .

$x$	-3	-2	1	2	
$f(x)$	+	0	-	0	+

- c)** Il s'agit de la courbe  $\mathcal{C}_2$  : elle est située au dessus de l'axe des abscisses sur  $[-3 ; -2[$  et sur  $]1 ; 2]$  et en dessous de l'axe des abscisses sur  $] -2 ; 1[$ .

### B 1

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$f(2) = -2$ , car la droite passe par le point de coordonnées  $(2 ; 2)$ .

- 2** La fonction  $F$  est une primitive de  $f$ , donc  $F' = f$ . On déduit alors du tableau de signes de  $f$  le sens de variation de  $F$ .

La fonction  $F$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; 3[$  et strictement croissante sur  $]3 ; +\infty[$ .

- 3** Les courbes  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_5$  correspondent au sens de variation trouvé à la question **2**.

Remarque : on peut poser la question aux élèves du lien existant entre les deux fonctions représentées par ces deux courbes et revenir ainsi sur le résultat concernant les différentes primitives d'une même fonction.

# Exercices

**2 a)**  $f'(x) = 3(6x - 5)(3x^2 - 5x + 2)^2$ .

**b)**  $f'(t) = 5(3 - \sin t)(3t + \cos t)^4$ .

**4 a)**  $u'(t) = -\frac{6t^2}{(t^3 + 1)^3}$ .

**b)**  $f'(x) = \frac{5 \sin x}{(\cos x)^6}$ .

**6 a)**  $f'(x) = \frac{21 \sin x}{\cos^4 x}$ .

**b)**  $f'(x) = 2 \sin^5 x + 5(2x - 1) \cos x \sin^4 x$ .

**7 a)**  $f'(x) = 15 \cos x(4 + \sin x)^4$ .

**b)**  $f'(x) = -\frac{12(\cos x - x \sin x)}{(x \cos x)^7}$ .

**8 a)**  $u'(t) = 6(3t + 1) + 2 \cos t \sin t$ .

**b)**  $v'(\theta) = -6 \sin \theta \cos \theta$ .

**9 a)**  $f'(t) = 3 \cos t \sin^8 t$ .

**b)**  $f'(t) = 6t(t^2 + 5)^2 \cos t - (t^2 + 5)^3 \sin t$ .

**10 a)**  $f'(x) = \sin^5 x + 5x \cos x \sin^4 x$ .

**b)**  $f'(t) = 6 \cos(3t + 5) \sin(3t + 5)$ .

**12 a)**  $f'(x) = -\frac{30x + 45}{(5x - 10)^4}$ .

**b)**  $f'(x) = \frac{\sin x - 2x \cos x}{\sin^3 x}$ .

**13 a)**  $g'(t) = -10 \sin(5t - 2) \cos(5t - 2)$ .

**b)**  $f'(x) = -10 \sin(2x) \cos(2x)^4$ .

**15**  $f'(x) = -\frac{24}{(3x - 6)^5}$ . Sur  $]-\infty; 2[$ ,  $3x - 6 < 0$

donc  $(3x - 6)^5 < 0$ , donc  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 2[$ .

**16**  $f'(t) = -\frac{40t^3}{(t^4 + 1)^3}$ . Pour tout réel  $t$ ,  $t^4 + 1 > 0$ , donc  $(t^4 + 1)^3 > 0$ ; d'autre part,  $-40t^3$  est du signe contraire de  $t$ . Donc  $f'(t) > 0$  sur  $]-3; 0[$  et  $f'(t) < 0$  sur  $]0; 3]$ . La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-3; 0[$  et strictement décroissante sur  $]0; 3]$ .

**17**  $f'(x) = 5(1 - \sin x)(x + \cos x)^4$ . Pour tout réel  $x$ ,  $(x + \cos x)^4 \geq 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \sin x$ . Or, pour tout  $x$  de  $[-\pi; \pi]$ ,  $1 - \sin x \geq 0$ . On en déduit que  $f$  est croissante sur  $[-\pi; \pi]$ .

Remarque : la dérivée s'annule pour deux valeurs (une qui annule  $x + \cos x$  et  $\frac{\pi}{2}$ ) mais ne change pas de signe.

**18**  $f'(x) = 2 \cos x \sin x$ . Sur  $[0; \pi]$ ,  $\sin x \geq 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $\cos x$ , c'est-à-dire positif sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et négatif sur  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ . Donc  $f$  est croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

**20 a)**  $F'(x) = x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions :

$x \mapsto \frac{x^5}{5} + 2x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)**  $F'(x) = -\sin(3x - 1) = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{3} \cos(3x - 1) + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**21 a)**  $F'(x) = 2 \cos x - 4 \sin x = f(x)$ .

Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto 2 \sin x + 4 \cos x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)**  $F'(x) = \cos x \sin^6 x = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{7} \sin^7 x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**22 a)**  $F'(x) = \frac{-3}{(3x - 1)^2} = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{3x - 1} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)**  $F'(x) = \frac{4}{(1 - 2x)^3} = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{(1 - 2x)^2} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**23 a)**  $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)**  $F'(x) = 3x(x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 4)^2 = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions :  $x \mapsto \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2 + 4)^3 + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**24 a)**  $F'(x) = \frac{-39}{(7x - 2)^2} = f(x)$ . Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{2x + 5}{7x - 2} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)**  $F'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^3} = f(x)$ . Les primitives de

$f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^2} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**26 a)**  $F'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + 2a + 3b}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ .

**b)** Il suffit de choisir  $a$  et  $b$  tels que  $-a = 3$ ,  $-2b = -10$  et  $2a + 3b = 9$ . Il existe bien des valeurs de  $a$  et  $b$  qui conviennent :  $a = -3$  et  $b = 5$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{-3x + 5}{x^2 - 3x + 2} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**27 a)** La fonction  $F$  est croissante sur  $[-5 ; -3]$  et sur  $[1 ; 2]$  ; elle est décroissante sur  $[-3 ; 1]$ .

**b)** On a  $F' = f$ , d'où le tableau suivant :

$x$	-5	-3	1	2	
$f(x)$	+	0	-	0	+

**28 a)** La fonction  $F$  est décroissante sur  $[-4 ; -1]$  et sur  $[2 ; 3]$  ; elle est croissante sur  $[-1 ; 2]$ .

**b)** On a  $F' = f$ , d'où le tableau suivant :

$x$	$-4$	$-1$	$2$	$3$	
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

**29** Par lecture graphique,  $f$  est positive sur  $[-3 ; -2]$  et sur  $[3 ; 4]$  ; elle est négative sur  $[-2 ; 3]$ . On a  $F' = f$ , on déduit donc du signe de  $F'$  que  $F$  est croissante sur  $[-3 ; -2]$  et sur  $[3 ; 4]$  ; qu'elle est décroissante sur  $[-2 ; 3]$ .

**30** Par lecture graphique,  $f$  est positive sur  $[-1 ; 0]$  et sur  $[2 ; 2,5]$  ; elle est négative sur  $[-2 ; -1]$  et sur  $[0 ; 2]$ . On a  $F' = f$ , on déduit donc du signe de  $F'$  que  $F$  est croissante sur  $[-1 ; 0]$  et sur  $[2 ; 2,5]$  ; qu'elle est décroissante sur  $[-2 ; -1]$  et sur  $[0 ; 2]$ .

**32 a)**  $F'(x) = 9x^2 + 10x + 11 = f(x)$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto 3x^3 + 5x^2 + 11x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.  $G$  est une primitive et vérifie  $G(1) = 8$ , donc  $19 + c = 8$ , d'où  $c = -11$ .  $G(x) = 3x^3 + 5x^2 + 11x - 11$ .

**33 a)**  $F'(x) = 12x - 9 = f(x)$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto 6x^2 - 9x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.  $G$  est une primitive et vérifie  $G(2) = 0$ , donc  $6 + c = 0$ , d'où  $c = -6$ .  $G(x) = 6x^2 - 9x - 6$ .

**34 a)**  $F'(x) = -3\sin x = f(x)$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto 3\cos x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.  $G$  est une primitive et vérifie  $G(\pi) = 1$ , donc  $-3 + c = 1$ , d'où  $c = 4$ .  $G(x) = 3\cos x + 4$ .

**35 a)**  $F'(x) = \frac{-2}{(x-5)^2} = f(x)$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{2}{x-5} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.  $G$  est une primitive et vérifie  $G(7) = 5$ , donc  $1 + c = 5$ , d'où  $c = 4$ .  $G(x) = \frac{2}{x-5} + 4$ .

**36 1. a)**

$x$	$-\infty$	$-4$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

**b)** On en déduit que les primitives de  $f$  sont décroissantes sur  $]-\infty ; -4[$  et sur  $]3 ; +\infty[$  et croissantes sur  $]-4 ; 3[$ .

**2. a)**  $F'(x) = -x^2 - x + 12 = f(x)$ .

**b)** Les primitives de  $f$  sont les fonctions  $x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**c)**  $G$  est une primitive de  $f$  donc  $G(0) = c$  et  $G(0) = 3$  donc  $c = 3$  et  $G(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x + 3$ .

**3. ③** ch3\_ex36.ggb

Dans les exercices suivants,  $c$  est une constante réelle.

**37 a)**  $F(x) = \frac{x^6}{6} + c$ . **b)**  $F(t) = \frac{t^8}{8} + c$ .

**38 a)**  $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$ . **b)**  $U(t) = \frac{t^7}{7} + c$ .

**39 a)**  $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + c$ . **b)**  $F(t) = -\frac{1}{t} + c$ .

**40**  $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + c$ . **b)**  $U(t) = -\frac{1}{6t^6} + c$ .

**41**

I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$
$F(x)$	$x^4$	$x^2$	$x^5$	$4x$	$-\cos x$	$-\frac{1}{x}$
$f(x)$	$4x^3$	$2x$	$5x^4$	$4$	$\sin x$	$\frac{1}{x^2}$
$f'(x)$	$12x^2$	$2$	$20x^3$	$0$	$\cos x$	$-\frac{2}{x^3}$

**43 a)**  $F(x) = 3\cos x + c.$

**b)**  $F(x) = \frac{x^4}{3} + 2x^3 + 5\sin x + c.$

**c)**  $F(t) = -7\cos t - 5\sin t + c.$

**44 a)**  $F(x) = -\frac{5}{3x^3} + c.$

**b)**  $F(t) = \frac{5}{2}\sin t + \frac{4}{t^2} + c.$

**c)**  $F(x) = -\frac{3}{4x^4} + \cos x + c.$

**46 a)**  $F(x) = \frac{x^4}{20} + c.$

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{2x} + c.$

**c)**  $U(t) = \frac{4}{3t^3} + \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t} + c.$

**48 a)**  $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - 2) + c.$

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{4}\cos(5x + 1) + c.$

**c)**  $F(t) = -6\sin\left(\frac{t}{2}\right) + c.$

**50 a)**  $F(x) = \frac{1}{5}(3x - 1)^5 + c.$

**b)**  $F(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^4 + c.$

**51 a)**  $F(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 5)^5 + c.$

**b)**  $F(x) = \frac{1}{6}(x - 3)^6 + c.$

**53 a)**  $F(x) = -\frac{1}{3\sin^3 x} + c.$

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{x^2 + 3} + c.$

**54 a)**  $F(t) = -\frac{1}{2t + \cos t} + c.$

**b)**  $F(t) = -\frac{1}{2(t + 1)^2} + c.$

**56 a)**  $F(x) = \sin^2(3x + 4) + c.$

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{9(3x^2 + x)^3} + c.$

**58**  $F(x) = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + c.$

**b)**  $F(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 3)^4 + c.$

**59**  $F(x) = \frac{1}{20}(5x - 1)^4 + c.$

**b)**  $G(x) = -\frac{1}{8(x^4 + 2)^2} + c.$

**61 a)**  $F(x) = -\frac{1}{15}(2 - 3x)^5 + c.$

**b)**  $G(x) = -\frac{2}{5(1 - 5x)^2} + c.$

**62 a)**  $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c.$

**b)**  $H(t) = t^5 - \frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{6} + t + c.$

**c)**  $F(x) = -\frac{1}{x^4 + x^2 + 4} + c.$

**d)**  $G(x) = -\frac{1}{x - 2} + c.$

**e)**  $F(t) = -\frac{3}{4(t^2 + 3)^2} + c.$

**f)**  $H(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{x + 5} + c.$

**63 a)**  $G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + c.$

**b)**  $G(t) = \frac{1}{8}(t^2 + 1)^4 + c.$

**c)**  $F(t) = -\frac{1}{3}\cos^3 t + c.$

**d)**  $F(x) = \frac{1}{24}(2x^3 + 1)^4 + c.$

**e)**  $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3(3x - 2)} + c.$

**f)**  $F(x) = \frac{2}{3(\cos x + 3)^3} + c.$

**64 a)**  $F(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c.$

**b)**  $F(x) = \frac{1}{6}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + c.$

**c)**  $G(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + c.$

**d)**  $H(x) = -\frac{1}{2(x + 4)^2} + c.$

**e)**  $F(t) = -\frac{1}{3(3t - 1)} + c.$

**f)**  $H(x) = -\frac{1}{6(x^2 + 5)} + c.$

**66 a)** Pour tout  $x$  de  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ ,

$a + \frac{b}{(2x - 1)^2} = \frac{4ax^2 - 4ax + a + b}{(2x - 1)^2}$  ; pour que

cette expression soit celle de  $f(x)$ , il suffit de choisir  $a$  et  $b$  vérifiant, si cela est possible,

$$\begin{cases} 4a = 4 \\ -4a = -4 \end{cases} \text{ On obtient } a = 1 \text{ et } b = -3. \text{ On a } \begin{cases} a + b = -2 \end{cases}$$

donc :  $f(x) = 1 - \frac{3}{(2x-1)^2}$ .

**b)**  $F(x) = x + \frac{3}{2(2x-1)} + c$ .

**67** Pour tout  $x$  de  $]1; +\infty[$ ,

$$\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (4a-2b)x + 4a+b}{(x^2+x-2)^2};$$

pour que cette expression soit celle de  $f(x)$ , il suffit de choisir  $a$  et  $b$  vérifiant, si cela est possible,

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases} \text{ On obtient } a = 2 \text{ et } b = -1. \text{ On a } \begin{cases} 4a + b = 7 \end{cases}$$

donc :  $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}$ .

**b)**  $F(x) = -\frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} + c$ .

**69 a)**  $F(x) = -\frac{1}{(1+x)} + c$

donc  $F(1) = -\frac{1}{2} + c$ . D'où  $-\frac{1}{2} + c = 1$ ,

soit  $c = \frac{3}{2}$  et  $F(x) = -\frac{1}{(1+x)} + \frac{3}{2}$ .

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c$

donc  $F(0) = -\frac{1}{4} + c$ . D'où  $-\frac{1}{4} + c = 0$ ,

soit  $c = \frac{1}{4}$  et  $F(x) = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}$ .

**70 a)**  $F(x) = \frac{1}{2}(x^3+2)^2 + c$ ,

donc  $F(-1) = \frac{1}{2} + c$ . D'où  $\frac{1}{2} + c = \frac{1}{2}$ ,

soit  $c = 0$  et  $F(x) = \frac{1}{2}(x^3+2)^2$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{9}(x^6 - x^3 + 1)^3 + c$ ,

donc  $F(0) = \frac{1}{9} + c$ . D'où  $\frac{1}{9} + c = 0$ ,

soit  $c = -\frac{1}{9}$  et  $F(x) = \frac{1}{9}(x^6 - x^3 + 1)^3 - \frac{1}{9}$ .

**71 a)**  $F(t) = \frac{1}{3}\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) + c$ ,

donc  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{6} + c$ . D'où  $-\frac{1}{6} + c = \frac{1}{2}$ ,

soit  $c = \frac{2}{3}$  et  $F(t) = \frac{1}{3}\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3}$ .

**b)**  $F(x) = -\frac{2}{5}\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

donc  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5} + c$ . D'où  $\frac{1}{5} + c = 2$ ,

soit  $c = \frac{9}{5}$  et  $F(x) = -\frac{2}{5}\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{9}{5}$ .

**72**  $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c$  donc  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$ .

D'où  $c = \frac{1}{3}$  et  $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{3}$ .

**b)**  $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{x-2} + c$

donc  $F(3) = \frac{9}{2} + c$ . D'où  $\frac{9}{2} + c = \frac{1}{2}$ ,

soit  $c = -4$  et  $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{x-2} - 4$ .

**73 a)** Pour tout  $x$  de  $I$ , on a

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{(4x+1)^2} = \frac{(4x+1)^2 - 2}{2(4x+1)^2} = f(x).$$

**b)**  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4(4x+1)} + c$ .

**c)**  $F_0(0) = \frac{1}{4} + c$ , donc  $\frac{1}{4} + c = \frac{3}{4}$ ,

soit  $c = \frac{1}{2}$  et  $F_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4(4x+1)} + \frac{1}{2}$ .

## Problèmes

**76 1. a)** Pour tout  $x$  de  $I$ ,

$$\left(1 - \frac{4}{x+1}\right)^3 = \left(\frac{x+1-4}{x+1}\right)^3 = f(x).$$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ .

**c)** La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ ; la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

**2. a)**  $f'(x) = 3 \times \frac{4}{(x+1)^2} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2$   

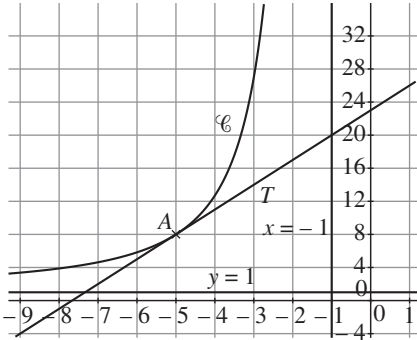
$$= \frac{12(x-3)^2}{(x+1)^4}$$

**b)** Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) > 0$ .

$x$	$-\infty$		$-1$
$f'(x)$		$+$	
$f$			$+\infty$

**3. a) b)**  $f(-5) = 8$  et  $f'(-5) = 3$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**77 a)** Pour tout  $x$  non nul,

$$x^2 + x - 6 = x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right).$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 6) = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 6) = +\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**2. a)**  $f'(x) = 4(2x + 1)(x^2 + x - 6)^3$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $4(x^2 + x - 6)^2 \geq 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $(2x + 1)(x^2 + x - 6)$ .

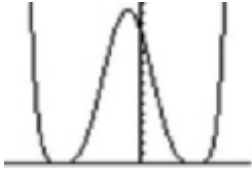
$x$	$-\infty$	$-3$	$-\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$		
$x^2+x-6$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$	
$2x+1$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$		
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

**c)**

$x$	$-\infty$	$-3$	$-\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$+\infty$		$\frac{390\,625}{256}$		$+\infty$			

**d)** D'après le tableau de variation, l'équation  $f(x) = 500$  admet quatre solutions.

**3. a)** Pour  $X$  entre  $-5$  et  $4$  et  $Y$  entre  $0$  et  $1600$ , on obtient :



**b)** Il y a une solution dans  $[-3,9 ; -3,7]$ , une dans  $[-1,8 ; -1,6]$ , une dans  $[0,6 ; 0,8]$  et une dans  $[2,7 ; 2,9]$ .

**78 a)** Pour tout  $x$  de  $]-\infty ; -2[$ ,  $f(x) < 0$  et pour tout  $x$  de  $]-2 ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ .

**b)** Toute primitive  $F$  de  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; +2[$  et strictement croissante sur  $]-2 ; +\infty[$ .

**c)** Les courbes de deux primitives de  $f$  sont les courbes rouges.

**d)** On sait que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Si on appelle  $F_1$  la fonction représentée par la courbe rouge passant par le point de coordonnées  $(0 ; -5)$  et  $F_2$  celle représentée par la courbe rouge passant par le point de coordonnées  $(0 ; -3)$ , on peut écrire, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $F_2(x) = F_1(x) + 2$ . On remarque que l'on obtient la courbe de  $F_2$  en faisant subir à celle de  $F_1$  une translation de vecteur  $2\overrightarrow{OJ}$ .

**79 a)** Pour tout  $x$  de  $]-\infty ; -2[$  et de  $]1 ; 2[$ ,  $f(x) < 0$  et pour tout  $x$  de  $]-2 ; 1[$  et de  $]2 ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ .

**b)** Toute primitive  $F$  de  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; -2[$  et sur  $]1 ; 2[$ , et strictement croissante sur  $]-2 ; 1[$  et sur  $]2 ; +\infty[$ .

**c)** Les courbes de deux primitives de  $f$  sont les courbes bleues.

**d)** On sait que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Si on appelle  $F_1$  la fonction représentée par la courbe bleue passant par le point de coordonnées  $(0 ; 0)$  et  $F_2$  celle représentée par la courbe bleue passant par le point de coordonnées  $(0 ; 3)$ , on peut écrire, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $F_2(x) = F_1(x) + 3$ . On remarque que l'on obtient la courbe de  $F_2$  en faisant subir à celle de  $F_1$  une translation de vecteur  $3\overrightarrow{OJ}$ .

**80 1.** Toute primitive de  $f_1$  est strictement croissante sur  $]-\infty ; 1,5[$  et strictement décroissante sur  $]1,5 ; +\infty[$ . Donc la courbe qui convient est  $b$ . La fonction dérivée de  $f_1$  est négative sur  $\mathbb{R}$ , donc la courbe qui convient est  $f$ .

Toute primitive de  $f_2$  est strictement décroissante sur  $]-2,25; 2,25[$  et strictement croissante sur  $]-\infty; -2,25[$  et sur  $]2,25; +\infty[$ . Donc la courbe qui convient est  $a$ . La fonction dérivée de  $f_2$  est négative sur  $]-\infty; 0[$  et positive sur  $]0; +\infty[$ , donc la courbe qui convient est  $e$ .

Toute primitive de  $f_3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc la courbe qui convient est  $c$ . La fonction dérivée de  $f_3$  est négative sur  $]-\infty; -0,5[$  et positive sur  $]-0,5; +\infty[$ , donc la courbe qui convient est  $d$ .

**2. a)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = -2x + 3$ .

**b)** Les primitives de  $f_1$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto -x^2 + 3x + c$ . Celle représentée par la courbe  $b$  passe par le point de coordonnées  $(0; 1)$ , donc il s'agit de la fonction  $F_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_1(x) = -x^2 + 3x + 1$ .

**c)** On a  $f'_1(x) = -2$ , ce qui correspond bien à la courbe  $f$ .

**3. a)** On a  $f'_2(x) = x$  et  $f'_3(x) = 2x + 1$ .

**b)** La fonction  $f_2$  est de la forme  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$  et sa courbe passe par le point de coordonnées  $(0; -5)$ , donc  $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$ .

La fonction  $f_3$  est de la forme  $x \mapsto x^2 + x + c$  et sa courbe passe par le point de coordonnées  $(0; 1)$ , donc  $f_3(x) = x^2 + x + 1$ .

**c)** Les primitives de  $f_2$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - 5x + c$ . Celle représentée par la courbe  $a$  passe par le point de coordonnées  $(0; 1)$ , donc il s'agit de la fonction  $F_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - 5x + 1$ .

Les primitives de  $f_3$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$ . Celle représentée par la courbe  $c$  passe par le point de coordonnées  $(0; -2)$ , donc il s'agit de la fonction  $F_3$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$ .

**81 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} f(x) = +\infty$ .  
 $x < \frac{5}{3}$   $x > \frac{5}{3}$

**b)** La droite d'équation  $x = \frac{5}{3}$  est asymptote à la courbe de  $f$ ; la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

**2. a)**  $f'(x) = -\frac{9}{(3x-5)^4}$ . Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $(3x-5)^4 > 0$ , donc  $f'(x) < 0$ .

**b)**

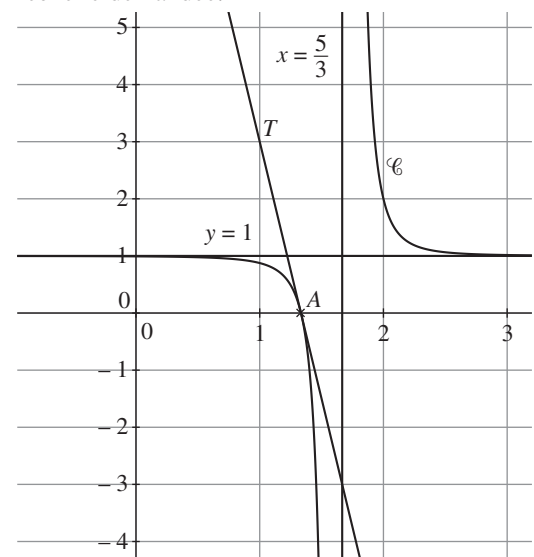
$x$	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f$	1		1

**c)**  $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$  donc  $\frac{4}{3}$  est une solution de l'équation  $f(x) = 0$ . D'après le tableau de variation, l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution dans l'intervalle  $]-\infty; \frac{5}{3}[$ , il s'agit donc de  $\frac{4}{3}$ , et n'a pas de solution dans l'intervalle  $]\frac{5}{3}; +\infty[$ .

Le point  $A$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ .

**d)**  $f'\left(\frac{4}{3}\right) = -9$ .

**3.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**4. a)** En lisant le signe de  $f(x)$ , donc de  $F'(x)$  sur le graphique, on en déduit le sens de variation de  $F$ : les tableaux A et D peuvent convenir.

**b)** Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto x - \frac{1}{6(3x-5)^2} + c$ .



La limite en  $-\infty$  de toutes les primitives est  $-\infty$ , donc le seul tableau de variation qui peut convenir est le A.

c) On a  $F(x) = x - \frac{1}{6(3x-5)^2} + c$ , donc

$$F\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6} + c. \text{ D'où } \frac{7}{6} + c = \frac{5}{2}, \text{ soit } c = \frac{4}{3} \text{ et}$$

$$F(x) = x - \frac{1}{6(3x-5)^2} + \frac{4}{3}.$$

**82 1. a)** Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) > 0$ .

b) Toutes les primitives de  $f$  sont croissantes sur  $I$ .

2. a)  $F(x) = -\frac{1}{2(2x-1)}.$

b) Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)} + c$ .

c) On a  $G(1) = -\frac{1}{2} + c$  donc  $-\frac{1}{2} + c = 1$ , soit  $c = \frac{3}{2}$ , d'où  $G(x) = -\frac{1}{2(2x-1)} + \frac{3}{2}$ .

3.  ch3\_pb82.ggb

e) Il semble que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  soit asymptote à la courbe de n'importe quelle primitive de  $f$ . Il semble que la courbe de la primitive de la forme  $x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)} + c$  ait pour asymptote horizontale en  $+\infty$ , la droite d'équation  $y = c$ .

4. Quelque soit la valeur de  $c$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \left( -\frac{1}{2(2x-1)} + c \right) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2(2x-1)} + c \right) = c.$$

**83 a)** On a, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $H'(x) = h(x)$ . On lit donc sur la courbe de  $H$  le coefficient directeur de la tangente pour obtenir la valeur de  $h$ . On obtient  $h(-3) = 4$ ,  $h(0) = -2$  et  $h(1) = 0$ .

b) 
$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 4 \\ c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases}.$$
 On obtient  $a = 1$ ,  $b = 1$  et

$$c = -2, \text{ d'où } h(x) = x^2 + x - 2.$$

c) Les primitives de  $h$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$ . Par lecture graphique,

$$\text{on a } H(0) = 0,5, \text{ d'où } H(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}.$$

**84 Partie A : a)**  ch3\_pb84.ggb

b)  $V = \pi r^2 h$ .

c) L'ordonnée de  $S$  représente le volume du cylindre.

d) Il semble qu'il y ait un volume maximal environ égal à  $1,21 \text{ m}^3$  atteint pour  $\alpha$  environ égal à  $0,62$  radians.

**Partie B : 1. a)**  $f'(x) = -6 \cos x \sin x$ . Pour tout

$x$  de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos x \geq 0$  et  $\sin x \geq 0$ , donc  $f'(x) \leq 0$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	
$f$	1	-2

b) D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction  $f$  prend une fois et une seule toutes les valeurs comprises entre  $-2$  et  $1$ , donc l'équation

$f(x) = 0$  a une unique solution  $x_0$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On a  $1 - 3 \sin^2 x_0 = 0$ , d'où  $\sin^2 x_0 = \frac{1}{3}$ . Or, sur

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq 0, \text{ donc } \sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et s'annule en  $x_0$  donc si  $x < x_0$ ,  $f(x) > 0$  et si  $x > x_0$ ,  $f(x) < 0$ .

2. a) On a  $r = \cos \alpha$  et  $h = \sin \alpha$ .

b)  $V(\alpha) = \pi \cos^2 \alpha \sin \alpha = \pi(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha$ .

$$= \pi(\sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$

c)  $V'(\alpha) = \pi(\cos \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha)$ .

$$= \pi \cos \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha)$$

d) Pour tout  $\alpha$  de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos \alpha > 0$ , donc  $V'(\alpha)$

est du signe de  $1 - 3 \sin^2 \alpha$ . On peut donc utiliser le signe de  $f$  étudié à la question 1. c).

$x$	0	$x_0$	$\frac{\pi}{2}$
$V'(\alpha)$	+	0	-
$f$	0	$V(x_0)$	0

e) D'après le sens de variation, la fonction  $V$  admet son maximum sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  en  $\alpha = x_0$ , valeur qui

annule  $f$ . On a vu que pour ce nombre on a :

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

f) On a alors  $h = \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  et

$$r = \cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0} \text{ (en effet, sur } ]0; \frac{\pi}{2}[ \text{ le}$$

$$\text{cosinus est positif), soit } r = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Le volume du cylindre est alors :

$$V(\alpha_0) = \pi r^2 h = \pi \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Le cylindre de volume maximum a pour dimensions  $h \approx 0,58$  m et  $r \approx 0,82$  m, pour un angle  $\alpha_0 \approx 0,62$  rad et un volume  $V \approx 1,21$  m<sup>3</sup>. Ces résultats sont conformes à ceux conjecturés dans la partie A.

**85 1. a)**  $V(t) = -5,5t + c$ , où  $c$  est une constante réelle. Or,  $V(0) = c = 13,9$ , donc  $V(t) = -5,5t + 13,9$ .

b)  $D(t) = -2,75t^2 + 13,9t + c'$ , où  $c'$  est une constante réelle.  $D(0) = c' = 0$ , donc  $D(t) = -2,75t^2 + 13,9t$ .

c) On a  $V(t) = 0$  pour  $t = \frac{13,9}{5,5} \approx 2,53$ .

d) On a  $D\left(\frac{13,9}{5,5}\right) = \frac{193,21}{11} \approx 17,6$ . Il faut environ

17,6 mètres pour s'arrêter lorsque l'on exerce la décélération maximale sur un véhicule roulant à 50 km.h<sup>-1</sup> (On peut, pour sensibiliser les élèves, comparer à la longueur de la salle de classe par exemple).

2. a)  $V(t) = -5,5t + 36,1$ .

b)  $D(t) = -2,75t^2 + 36,1t$

c) On a  $V(t) = 0$  pour  $t = \frac{36,1}{5,5} \approx 6,56$ .

d)  $D\left(\frac{36,1}{5,5}\right) = \frac{1303,21}{11} \approx 118,5$ . Il faut environ

118,5 mètres pour s'arrêter lorsque l'on exerce la décélération maximale sur un véhicule roulant à 130 km.h<sup>-1</sup>.

3. Si on fait le quotient des distances de freinage pour une vitesse de 130 km.h<sup>-1</sup> et pour une vitesse de 50 km.h<sup>-1</sup>, le rapport est 6,75, alors que le rapport des vitesses est 2,6. La distance de freinage n'est donc pas proportionnelle à la vitesse.

On peut pousser le questionnement plus loin avec de bons élèves en leur faisant faire le calcul de la distance de freinage en fonction de la vitesse  $v$  :

on obtient  $D = \frac{v^2}{11}$  : la distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse.

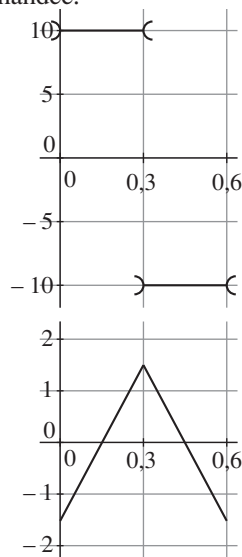
**86 1.** Pour  $t \in ]0; 0,3[$   $i(t) = 10t + c$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} i(t) = i(0) = -1,5$ , donc  $i(t) = 10t - 1,5$ .

2. a)  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0,3 \\ t < 0,3}} i(t) = 1,5$

b) Les primitives de  $u$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto -10t + c$ , où  $t$  est une constante réelle.  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0,3 \\ t > 0,3}} (-10t + c) = -3 + c$ .

c)  $c = 4,5$  et pour  $t$  appartenant à  $]0,3; 0,6[$ ,  $i(t) = -10t + 4,5$ .

d) Les représentations ci-dessous ne sont pas à l'échelle demandée.



**87** La difficulté de ce problème est de traiter le cas général, donc d'avoir une fonction de la variable  $r$  dépendant de deux constantes  $E$  et  $R$ . L'illustration par GeoGebra peut permettre aux élèves de mieux comprendre les rôles respectifs de la variable et des paramètres. On peut aussi traiter d'abord le TP2, qui aborde le même problème dans un cas particulier,  $E$  et  $R$  ayant une valeur numérique.

$$1. P = E^2 \frac{r}{(r + R)^2}$$

2. ch3\_pb87.ggb

En faisant varier  $E$ , on observe que les courbes semblent toutes avoir un sommet dont l'abscisse ne varie pas quand  $E$  varie, mais dont l'ordonnée augmente lorsque  $E$  augmente. En faisant varier  $R$ , il semble que l'abscisse du sommet ait pour

abscisse environ  $R$ . (Il est nécessaire de changer à plusieurs reprises d'échelle, éventuellement de modifier le rapport axe  $X$  : axe  $Y$  pour obtenir ces résultats.)

**3. a)**  $g(r) = E^2 \frac{1}{r \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2}$ , donc  $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$ .

**b)** On peut faire faire le calcul de la dérivée (il n'utilise que des formules au programme de terminale), mais on risque alors de faire perdre le « fil » du problème aux élèves.

$$g'(r) = E^2 \frac{r^2 + 2rR + R^2 - 2r^2 - 2rR}{(r + R)^4}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{(r + R)^4} = \frac{(R - r)}{(r + R)^3}.$$

**c)**

$r$	0	$R$	$+\infty$
$g'(r)$		+	-
$g$	0	$\frac{E^2}{4R}$	0

**d)** Le maximum de  $g$  est atteint pour  $r = R$  et est égal à  $\frac{E^2}{4R}$ . On a démontré la conjecture.

**4.** Pour obtenir une puissance récupérée maximale il faut donc choisir  $r = R$ . La puissance maximale est alors  $\frac{E^2}{4R}$ .

## Vers le Bac

**88 1. b) 2. a) 3. b) 4. c)**

**89 1.** Si la courbe de  $g$  était la courbe rouge, alors,  $g$  serait négative sur  $[-1; 0]$ , donc ses primitives seraient toutes décroissantes sur cet intervalle, or la fonction représentée par la courbe bleue est croissante sur cet intervalle. La courbe de  $g$  n'est donc pas la courbe rouge.

On peut aussi raisonner de façon directe : la primitive  $G$  change de sens de variation lorsque la fonction  $g$  s'annule et change de signe, donc la courbe de  $G$  est la courbe rouge et celle de  $g$  la courbe bleue.

**2. a)**  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 2$  et  $g'(1) = 0$  (la tangente au sommet d'une parabole est parallèle à l'axe des abscisses).

**b)**  $g(0) = c = 1$ ,  $g(1) = a + b + c = 2$  et  $g'(1) = 2a + b = 0$ . On obtient un système dont les solutions sont  $a = -1$ ,  $b = 2$  et  $c = 1$ . D'où  $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ .

**3. a)** Les primitives de  $g$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto -\frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**b)** La courbe de  $G$  passe par le point de coordonnées  $(0; -1)$ , donc  $G(0) = -1$ , d'où  $c = -1$  et  $G(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 1$ .

**90 1. a)**  $f(0) = -1$  car la courbe passe par  $B$ ,  $f(-1) = 0$  car la courbe passe par  $A$  et  $f'(0) = 0$  car la courbe a une tangente de coefficient directeur 0 au point  $B$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

**c)**

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	-1	0

**d) •** L'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  d'après le tableau de variation et cette solution est  $-1$  d'après le **a)**.

• D'après le tableau de variation (ou par lecture graphique),  $f'(x)$  est positif ou nul pour  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ .

**e)**

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

**2.** La tangente à la courbe représentative de  $F$  passe par le point d'abscisse 0 de cette courbe et par lecture graphique ce point a pour ordonnée  $F(0) = 2$ . Cette droite a pour coefficient directeur  $F'(0) = f(0) = -1$ .

Donc elle a pour équation :  $y = -x + 2$ .

**91 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + 8x + 7) = -9$  et

$\lim_{x \rightarrow -4} (x + 4)^2 = 0$ ; de plus  $(x + 4)^2 > 0$

sur  $] -4; +\infty[$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$ .

**b)** La courbe  $C$  admet pour asymptote la droite d'équation  $x = -4$ .

c) Pour  $x$  non nul,  $f(x) = \frac{1 + \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}{\left(1 + \frac{4}{x}\right)^2}$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

d) La courbe  $\mathcal{C}$  admet la droite d'équation  $y = 1$  pour asymptote en  $+\infty$ .

2.

$$f'(x) = \frac{(2x+8)(x^2+8x+16) - (x^2+8x+7)2(x+4)}{(x+4)^4}$$

$$= \frac{2(x+4) \times 9}{(x+4)^4} = \frac{18}{(x+4)^3}.$$

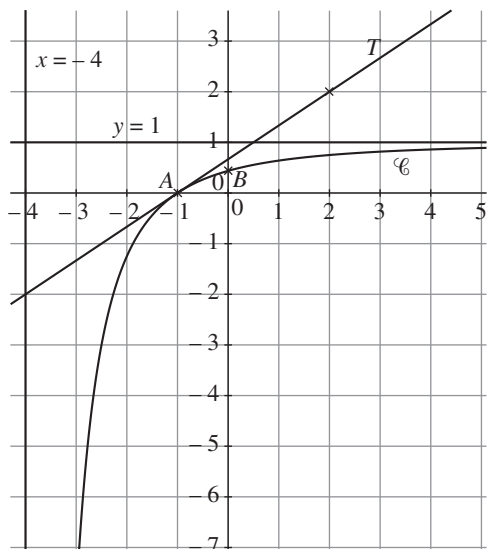
Pour tout  $x$  de  $]-4; +\infty[$ ,  $x+4 > 0$ , donc  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $]-4; +\infty[$ .

3. On a  $f(0) = \frac{7}{16}$ , donc le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées  $\left(0; \frac{7}{16}\right)$ .

L'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à  $x > -4$  et  $x^2 + 8x + 7 = 0$ . Cette dernière équation a deux solutions,  $-1$  et  $-7$ , une seule dans l'intervalle de définition. Le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses a pour coordonnées  $(-1; 0)$ .

4. a) On utilise  $f(-1) = 0$  et  $f'(-1) = \frac{2}{3}$ .

Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



5. Pour tout  $x$  de  $]-4; +\infty[$ ,

$$1 - \frac{9}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 16 - 9}{(x+4)^2} = f(x)$$

b) Les primitives de  $f$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto x + \frac{9}{x+4} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

On a  $F(-1) = 2 + c$ , d'où  $2 + c = 0$ , soit  $c = -2$ , donc  $F(x) = x + \frac{9}{x+4} - 2$ .

92 1. a) L'équation proposée est équivalente à  $\sin x = 0$  ou  $1 + 2\cos x = 0$ .

Sur  $[0; 2\pi]$ ,  $\sin x = 0$  pour  $x = 0$ ,  $x = \pi$  ou  $x = 2\pi$ .

Sur  $[0; 2\pi]$ ,  $\cos x = -\frac{1}{2}$  pour  $x = \frac{2\pi}{3}$  ou

$$x = \frac{4\pi}{3}.$$

Conclusion :  $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ .

b)

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$
$f(x)$	0	-	0	+	0

2. a)  $f(x) = -\sin x - 2\cos x \sin x = -\sin x - \sin(2x)$ .

b) Les primitives de  $f$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + c$ .

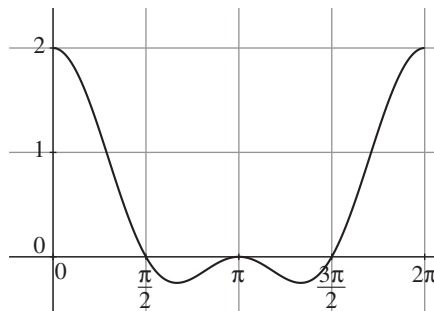
c)  $F(0) = \frac{3}{2} + c$ , d'où  $\frac{3}{2} + c = 2$ , soit  $c = \frac{1}{2}$

et  $F(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ .

3. On a  $F' = f$ , d'où le tableau suivant :

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$
$F'(x) = f(x)$	0	-	0	+	0
$f$	2	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	2

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



## 4

Fonctions  
logarithmes

## Activités

## Activité 1 Stockage des entiers dans les systèmes informatiques

Dans cette activité, on présente une situation concrète liée à l'informatique. On montre ainsi l'intérêt de rechercher une fonction transformant un produit en une somme (ce qui justifie l'intérêt de la fonction  $\ln$ ).

**A 1 a)**  $10_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$ .

On procède de même pour les suivants.

**b)** 11   **c)** 17   **d)** 24   **e)** 149   **f)** 247.

**2 a)** Le nombre 11 s'écrit  $1011_2$  en base 2 donc 4 bits sont nécessaires au stockage de ce nombre.

On procède de même pour les suivants.

**b)** 2   **c)** 8   **d)** 8   **e)** 5   **f)** 5.

**B 1 a)**  $11111111_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 255$ .

**b)** Sur 8 bits, on peut donc stocker les 256 entiers compris entre 0 et 255, 0 et 255 compris. On peut donc stocker  $2^8$  entiers sur 8 bits.

**c)** De même :  $512 = 2^9$  et 9 représente le nombre de bits nécessaires au stockage des 512 entiers compris entre 0 et 511, 0 et 511 compris.

**d)** De même, comme  $1\,024 = 2^{10}$  donc sur 10 bits, on peut stocker les 1 024 entiers compris entre 0 et 1 023, 0 et 1 023 compris.

**2 a)**  $f(4) = f(2^2) = 2$  et de même, on a :  $f(256) = 8$  et  $f(1\,024) = 10$ .

**b)**  $4 \times 256 = 1\,024$  et donc  $f(1\,024) = f(4 \times 256) = f(4) + f(256)$ .

**c)**  $f(2) = 1$  et  $f(128) = 7$  donc  $f(256) = f(2 \times 128) = f(2) + f(128)$ .

**d)**  $f(2^m) = m$ ,  $f(2^n) = n$  et  $f(2^m \times 2^n) = f(2^{m+n}) = m + n$  donc  $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ .

## Activité 2 Du produit à la somme

Cette activité est la suite naturelle de l'activité précédente : après avoir justifié l'intérêt de disposer d'une fonction transformant produit en somme, on s'intéresse ici aux propriétés d'une telle fonction.

**1 a)** On remplace  $a$  par 0 dans (\*) donc  $f(0) = f(0) + f(b)$  d'où le résultat.

**b)** On en conclut que la fonction nulle est la seule fonction vérifiant (\*) et définie en 0, d'où le choix de se restreindre à  $]0; +\infty[$ .

**2** En posant  $a = b = 1$  dans (\*), on a :  $f(1) = f(1) + f(1)$  d'où  $f(1) = 0$ .

**3 a)**  $g_2'(x) = f'(x)$  car  $f(a)$  est une constante.

**b)** D'après (\*), les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  sont égales sur  $]0; +\infty[$  donc leurs dérivées le sont aussi.

**c)** De l'égalité  $g_1'(x) = g_2'(x)$ , on en déduit que  $f'(ax) = \frac{f'(x)}{a}$ , et cela pour tous réels  $a$  et  $x$  strictement positifs.

En posant  $x = 1$ , on en déduit que pour tout  $a > 0$ ,  $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$ .

**4 a)**  $f(1) = 0$ .

**b)** Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

**5 a)**  $f(1) = 0$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

**b)**  $h'(x) = u'(x) - v'(x) = 0$ .

La dérivée de  $h$  s'annulant sur  $]0; +\infty[$ , il existe un réel  $k$  tel que pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = k$ .

**c)** On a :  $h(1) = u(1) - v(1) = 1 - 1 = 0$  d'où pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = 0$ . On en déduit que  $u = v$  d'où l'unicité d'une fonction  $f$  vérifiant la relation (\*), définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  telle que  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

## Travaux Pratiques

### TP 1 Comparaison du comportement en $+\infty$ de la fonction $\ln$ avec les fonctions puissances

Le but de ce TP est de découvrir graphiquement de deux façons différentes la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$  (soit par comparaison des représentations graphiques des fonctions  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto x^n$ , soit par utilisation de la représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}$ ) puis d'utiliser la limite de référence correspondante dans des calculs de limite.

**A 1** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ . On ne peut donc pas en déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$  grâce au théorème sur la limite d'un quotient : on est en présence d'une forme indéterminée.

**2 a)**  ch4\_tp1.ggb.

**b)** On conjecture que l'ordre de grandeur de  $x^n$  est bien plus « grand » que l'ordre de grandeur de  $\ln x$  pour une même « grande » valeur de  $x$ , et cela d'autant plus que  $x$  est « grand ».

**c)** On conjecture alors de **b)** que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

**3 a)**  ch4\_tp1.ggb.

**b)** On conjecture que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $C_n$  en  $+\infty$ , donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

**c)** On retrouve la conjecture émise à la question **2. c)**.

**B 1 a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ . On ne peut donc pas en déduire la limite

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$  grâce au théorème sur la limite d'une somme : on est en présence d'une forme indéterminée.

**b)** En mettant  $x^2$  en facteur, on a :  $f(x) = x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$  d'après la limite de référence précédente donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = -1$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = -\infty$ .

**2 a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ . On ne peut donc pas en déduire la limite

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1 + \ln x}$  grâce au théorème sur la limite d'un quotient : on est en présence d'une forme indéterminée.

**b)** En factorisant le dénominateur de  $g(x)$  par  $x^3$ , on a :  $g(x) = \frac{x^3}{1 + \ln x} = \frac{1}{\frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3}}$ .

**c)** Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$  d'après la limite de référence précédente et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} \right) = 0$ .

Comme, pour  $x > e$ ,  $\left( \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} \right) > 0$ , on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3}} = +\infty$ .

## TP 2 Du logarithme décimal dans les étoiles

Le but de ce TP est double : dans la partie A, on introduit la fonction logarithme décimal ; dans la partie B, on l'utilise en contexte pour étudier le lien entre la magnitude apparente d'une étoile et son éclat. On trouvera d'autres applications dans les problèmes.

**A 1 a)** On a :  $\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$ . De même, on a  $\log(10) = 1$  et  $\log(100) = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 2$ . On vérifie ces résultats en se servant de la touche « log » de la calculatrice.

**b)** Pour entier relatif  $p$ ,  $\log(10^p) = \frac{\ln 10^p}{\ln 10} = \frac{p \ln 10}{\ln 10} = p$ .

**c)** Pour tout entier relatif  $p$  et tout réel  $x > 0$  tel que  $\log x = p$ ,  $\ln x = p \ln 10 = \ln 10^p$  donc  $x = 10^p$ .

**2 a)** La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  donc, par définition de la fonction  $\log$ , la fonction  $\log$  est aussi dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{x \ln 10}$ . Comme  $\ln 10 > 0$  et  $x > 0$ , on en

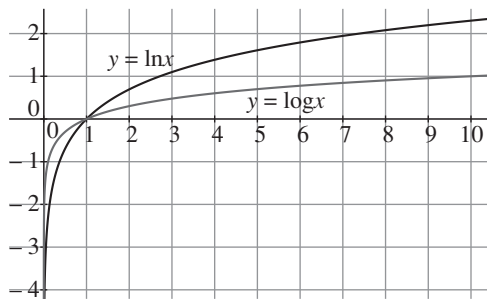
déduit que la fonction  $\log$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ . Enfin, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ , on a par définition de la fonction  $\log$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ . D'où

le tableau de variation de la fonction  $\log$  :

$x$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x \ln 10}$		+
$\log$	$-\infty$	$+\infty$

**b)** Les représentations ci-dessous ne sont pas à l'échelle demandée :



**3** Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ , on a :

$$\log(x) + \log(y) = \frac{\ln x}{\ln 10} + \frac{\ln y}{\ln 10} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln 10} = \frac{\ln(xy)}{\ln 10} = \log(xy).$$

On démontrerait de même que toutes les propriétés algébriques de la fonction  $\ln$  restent vraies pour la fonction  $\log$ .

**B 1 a)** On a :  $m_A - m_B = k - 2,5 \log E_A - (k - 2,5 \log E_B) = -2,5 \log \left( \frac{E_A}{E_B} \right).$

**b)** Si  $E_A > E_B$  alors  $\left( \frac{E_A}{E_B} \right) > 1$  donc  $\log \left( \frac{E_A}{E_B} \right) > 0$  d'où, d'après **a)**,  $m_A - m_B < 0$  soit  $m_A < m_B$ .

**2 a)** D'après **1 a)**,  $m_{PL} - m_{QL} = -2,5 \log \left( \frac{E_{PL}}{E_{QL}} \right)$  avec PL pour Pleine Lune et QL pour Quartier de Lune, donc  $m_{PL} - (-8) = -2,5 \log 631$  soit  $m_{PL} = -2,5 \log 631 - 8 \approx -15,0$  à 0,1 près.

**b)** Soit deux étoiles A et B telles que  $\frac{E_A}{E_B} = \frac{1}{100}$ , alors  $m_A - m_B = -2,5 \log \left( \frac{E_A}{E_B} \right) = -2,5 \times (-2) = 5$ , leurs magnitudes apparentes diffèrent donc de 5.

**c)** On a :  $m_S - m_P = -2,5 \log \left( \frac{E_S}{E_P} \right)$ . Comme  $m_S < m_P$ ,  $m_S - m_P < 0$  donc  $\log \left( \frac{E_S}{E_P} \right) > 0$  soit  $E_S > E_P$  : l'étoile la plus brillante des deux est Sirius. De plus, on a :  $m_S - m_P = -2,5 \log \left( \frac{E_S}{E_P} \right)$

donc  $-1,4 - 1,1 = -2,5 \log \left( \frac{E_S}{E_P} \right)$  d'où  $\log \left( \frac{E_S}{E_P} \right) = 1$  soit  $\frac{E_S}{E_P} = 10$ .

**d)** D'après **1 a)**,  $m_H - m_T = -2,5 \log \left( \frac{E_H}{E_T} \right)$  avec H pour une étoile de magnitude 30 photographiée par Hubble et T pour une étoile photographiée par le télescope implanté sur la Terre.

On a alors :  $30 - 22,5 = -2,5 \log \left( \frac{E_H}{E_T} \right)$  soit  $\log \left( \frac{E_H}{E_T} \right) = -3$  donc  $\frac{E_H}{E_T} = 10^{-3}$ . On en déduit que le télescope Hubble permet de voir des étoiles dont l'éclat est 1 000 fois plus faible que celles observées avec le télescope T.



# Exercices

- 2 a)**  $\ln 15 = \ln(3 \cdot 5) = \ln 3 + \ln 5$  ;  
**b)**  $\ln 45 = \ln(3^2 \cdot 5) = 2 \ln 3 + \ln 5$  ;  
**c)**  $\ln 375 = \ln(3 \cdot 5^3) = \ln 3 + 3 \ln 5$  ;  
**d)**  $\ln \frac{9}{125} = \ln \frac{3^2}{5^3} = 2 \ln 3 - 3 \ln 5$  ;  
**e)**  $\ln \frac{1}{135} = -\ln(3^3 \times 5) = -3 \ln 3 - \ln 5$  ;  
**f)**  $\ln \sqrt{75} = \frac{1}{2} \ln 75 = \frac{1}{2} \ln(3 \cdot 5^2) = \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 5$ .

- 4 a)**  $A(x) = \ln((3-x)(1+2x))$  ;  
**b)**  $B(x) = \ln \frac{3x-6}{3} = \ln(x-2)$ .

- 5 a)**  $A(x) = \ln(1-2x)^2$  ;  
**b)**  $B(x) = \ln \sqrt{x} - \ln(2x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{2x} = \ln \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

- 6 a)**  $A(x) = \ln \frac{x^3}{3x} = \ln \left( \frac{1}{3} x^2 \right)$  ;

- b)**  $B(x) = \ln \left( \frac{1}{2} x^2 \right)$ .

- 8 a)**  $f'(x) = 3x^2 - 2 \times \frac{1}{x} = 3x^2 - \frac{2}{x}$  ;

- b)**  $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^4 = \frac{5(\ln x)^4}{x}$ .

- 9 a)**  $f'(x) = - \left( - \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \right) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$  ;

- b)**  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2}$ .

- 10 a)**  $f'(x) = \frac{\left( 3 \times \frac{1}{x} \right) \ln x - (3 \ln x + 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$   
 $= \frac{-3}{x(\ln x)^2}$  ;

- b)**  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1-2 \ln x}{x^3}$ .

- 11 a)**  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$  ;  $g'(x) = -2 + \frac{4}{x}$   
 et  $h'(x) = 1 - \frac{2}{x}$ .

**b)** Comme  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  donc la courbe rouge est la représentation graphique de  $f$ .

Pour  $0 < x \leq 2$ ,  $g'(x) \geq 0$  et pour  $x \geq 2$ ,  $g'(x) \leq 0$  donc  $g$  est croissante sur  $]0 ; 2]$  et décroissante sur  $[2 ; +\infty[$  donc la courbe verte est la représentation graphique de  $g$ .

Par élimination, la courbe bleue est la représentation graphique de  $h$ .

- 13 a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ;

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$  avec  $\ln x < 0$  pour  $x < 1$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  ;

- b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- 14**  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  avec  $x > 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

- 15** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$  ;

$\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x) = +\infty$  donc la

courbe bleue correspond à  $f_2$  et la courbe verte à  $f_4$ . Par ailleurs,  $f_1(1) = 0$  et  $f_3(1) = 1$  donc la courbe rouge correspond à  $f_1$  et la courbe noire à  $f_3$  (la détermination des limites en  $+\infty$  de ces deux fonctions ne permettait pas de conclure).

- 16 a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  donc la courbe  $C$  admet la droite d'équation  $x = 0$  pour asymptote (c'est l'axe des ordonnées) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

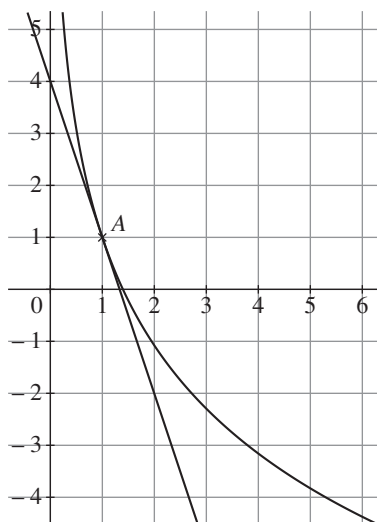
- b)**  $f'(x) = \frac{-3}{x}$ .

**c)** Comme  $x > 0$ ,  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ , d'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$f$	$+\infty$	$-\infty$

**d)**  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = -3$  donc la tangente à tracer est la droite passant par le point  $A(1 ; 1)$  et de coefficient directeur  $-3$ .

e) La représentation ci-après n'est pas à l'échelle demandée.



**17 a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  donc la courbe  $C$  admet la droite d'équation  $x = 0$  pour asymptote (c'est l'axe des ordonnées) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

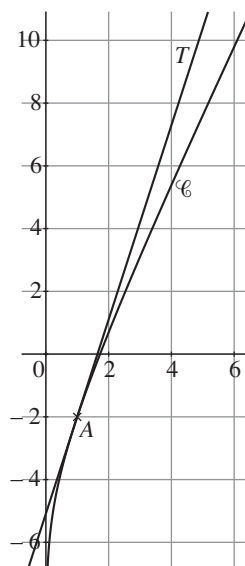
**b)**  $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ .

**c)** Comme  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ , d'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

**d)**  $f(1) = -2$  et  $f'(1) = 3$  donc la tangente à tracer est la droite passant par le point  $A(1 ; -2)$  et de coefficient directeur 3.

e) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**18 1.** ch4\_ex18\_ggb

On conjecture que la distance  $PN$  est constante et égale à 1.

**2. a)**  $M(a ; \ln a)$ ,  $P(0 ; \ln a)$ . Par ailleurs, le coefficient directeur de  $T$  est  $\frac{1}{a}$  donc  $T$  a pour équation réduite  $y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a$  soit

$$y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a.$$

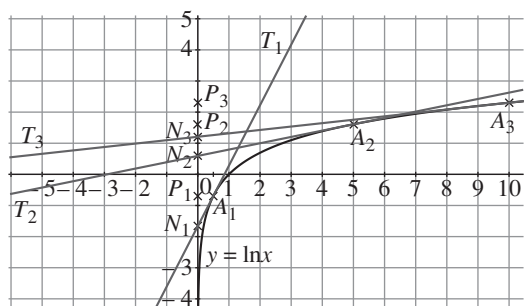
**b)** Par définition, l'abscisse de  $N$  est 0 donc son ordonnée est  $y_N = -1 + \ln a$ . D'où  $N(0 ; -1 + \ln a)$ .

**c)**  $PN = \sqrt{(-1 + \ln a - \ln a)^2} = 1$   
d'où la démonstration de la conjecture.

**3. a)** On place les points  $A_1(0,5 ; \ln 0,5)$ ,  $A_1(5 ; \ln 5)$  et  $A_1(10 ; \ln 10)$ .

**b)** Pour la tangente en  $A_1$ , il suffit de placer le point  $P_1$  projeté orthogonal de  $A_1$  sur l'axe des ordonnées puis de placer le point  $N_1$  image de la translation de  $P_1$  par le vecteur  $-\overrightarrow{OJ}$  (car  $P_1N_1 = 1$ ). La tangente cherchée est alors la droite  $(A_1N_1)$ . On fait de même pour  $A_2$  et  $A_3$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée



**20 a)**  $2 \ln e^3 = 6;$

**b)**  $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2};$

**c)**  $\ln e^2 + \ln \frac{1}{e^4} = 2 - 4 = -2.$

**21 a)**  $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e};$

**b)**  $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2};$

**c)**  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{-1}{\frac{1}{e}} = -e;$

**d)**  $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$

**22 a)**  $f(e) = 3 - 2 \ln e = 1;$

**b)**  $f(e^2) = 3 - 2 \ln e^2 = -1;$

**c)**  $f\left(\frac{1}{e}\right) = 3 - 2 \ln \frac{1}{e} = 3 + 2 = 5;$

**d)**  $f(\sqrt{e}) = 3 - 2 \ln \sqrt{e} = 3 - 1 = 2.$

**24 a)** L'équation existe si et seulement si  $x > 0$ . L'équation  $\ln x = 3$  admet  $e^3$  pour seule solution.

**b)** L'équation existe si et seulement si  $2x - 1 > 0$  et  $4 - x > 0$  donc si et seulement si  $\frac{1}{2} < x < 4$ .

L'équation devient :  $2x - 1 = 4 - x$  soit  $x = \frac{5}{3}$ .

Or  $\frac{1}{2} < \frac{5}{3} < 4$  donc l'équation admet  $\frac{5}{3}$  pour seule solution.

**c)** L'équation existe si et seulement si  $x > \frac{3}{2}$ . Elle admet 2 pour seule solution.

**25 a)** L'inéquation existe si et seulement si  $x > 1$ . Elle s'écrit encore  $x - 1 \geq 1$  donc l'inéquation admet  $[2; +\infty[$  pour ensemble de solutions.

**b)** L'inéquation existe si et seulement si  $x > -2$ . Elle s'écrit encore  $x + 2 < e^{-2}$  donc l'inéquation admet  $] -\infty; e^{-2} - 2]$  pour ensemble de solutions.

**28 a)** L'équation existe si et seulement si  $4x - 1 > 0$  et  $x^2 - 1 > 0$  donc si et seulement si  $x > 1$ . L'équation devient :  $\ln \frac{4x - 1}{x^2 - 1} = \ln 4$

soit  $4x^2 - 4x - 3 = 0$ . Cette dernière équation admet  $\frac{3}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  pour solutions donc l'équation étudiée admet  $\frac{3}{2}$  pour seule solution.

**b)** L'équation existe si et seulement si  $x + 1 > 0$  et  $10x + 10 > 0$  donc si et seulement si  $x > -1$ . L'équation devient :  $x^2 - 3x - 4 = 0$  qui admet  $-1$  et  $4$  pour solutions donc l'équation étudiée admet 4 pour seule solution.

**30 a)** L'inéquation existe si et seulement si  $x > 0$ ,  $x - 1 > 0$  et  $x + 1 > 0$  donc si et seulement si  $x > 1$ .

Elle s'écrit encore  $x(x - 1) > x + 1$ . Cette dernière inéquation s'écrit encore  $x^2 - 2x - 1 > 0$ , qui admet  $] -\infty; 1 - \sqrt{2}[ \cup ]1 + \sqrt{2}; +\infty[$  pour ensemble de solutions. On déduit de la condition  $x > 1$  que l'inéquation étudiée admet  $]1 + \sqrt{2}; +\infty[$  pour ensemble de solutions.

**b)** L'inéquation existe si et seulement si  $x > 0$ ,  $x - 3 > 0$  et  $15 - x > 0$  donc si et seulement si  $3 < x < 15$ .

Elle s'écrit encore  $x(x - 3) \leq 15 - x$ . Cette dernière inéquation s'écrit encore  $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ , qui admet  $[-3; 5]$  pour ensemble de solutions. On déduit de la condition  $3 < x < 15$  que l'inéquation étudiée admet  $]3; 5]$  pour ensemble de solutions.

**31 a)** L'inéquation existe si et seulement si  $x - 1 > 0$  et  $3 - x > 0$  donc si et seulement si  $1 < x < 3$ . Elle s'écrit encore  $\frac{x - 1}{3 - x} \geq 3$ .

Comme  $x < 3$ , cette dernière inéquation s'écrit encore  $x - 1 \geq 9 - 3x$ , qui admet  $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$  pour ensemble de solutions. On déduit de la condition  $1 < x < 3$  que l'inéquation étudiée admet  $\left[\frac{5}{2}; 3\right[$  pour ensemble de solutions.

**b)** L'inéquation existe si et seulement si  $x - 1 > 0$ ,  $x + 2 > 0$  et  $5 - x > 0$  donc si et seulement si  $2 < x < 5$ .

Elle s'écrit encore  $\frac{x-1}{(x+2)^2} < \frac{1}{5-x}$ .

Comme  $2 < x < 5$ , cette dernière inéquation s'écrit encore  $(x-1)(5-x) < (x+2)^2$  soit encore  $2x^2 - 2x + 9 > 0$ , qui n'admet pas de solution.

On en déduit que l'inéquation étudiée n'admet pas de solution.

**33 1.** L'équation admet  $\frac{1}{2}$  et  $-3$  pour solutions.

**2. a)** Avec  $X = \ln x$ , l'équation proposée s'écrit encore  $2X^2 + 5X - 3 = 0$  soit  $X = \frac{1}{2}$  ou  $X = -3$  d'après **1.** D'où le résultat.

**b)** D'après **a)**, l'équation  $2(\ln x)^2 + 5 \ln x - 3 = 0$  admet  $e^{\frac{1}{2}}$  et  $e^{-3}$  pour solutions.

**34 1.** L'équation admet  $-\frac{1}{2}$  et  $2$  pour solutions.

**2. a)** Avec  $X = \ln x$ , l'équation proposée s'écrit encore  $2X^2 - 3X - 2 = 0$  soit  $X = -\frac{1}{2}$  ou  $X = 2$  d'après **1.** D'où le résultat.

**b)** D'après **a)**, l'équation  $2(\ln x)^2 - 3 \ln x - 2 = 0$  admet  $e^{-\frac{1}{2}}$  et  $e^2$  pour solutions.

**35 1.** L'équation existe si et seulement si  $x > 0$  et admet  $]0; e[$  pour ensemble de solutions.

**2. a)**  $f'(x) = 1 - \ln x$ .

**b) et c)** On obtient pour tableau de signes de  $f'(x)$  et tableau de variation de  $f$ :

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f$		$e$	

**3. a)**  $f(1) = 2$  donc, d'après le tableau de variation, pour tout réel  $x$  de  $[1; e]$ ,  $f(x)$  appartient à  $[2; e]$  donc l'équation  $f(x) = 1$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[1; e]$ .

Par ailleurs,  $f(10) > 1$  donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[e; 10]$  d'après le tableau de variation précédent.

**b)** Par balayage à la calculatrice, on obtient pour valeur approchée à 0,1 près de cette solution : 6,3.

**36 1.** L'équation existe si et seulement si  $x > 0$  et admet  $]e^2; +\infty[$  pour ensemble de solutions.

**2. a)**  $f'(x) = -2 + \ln x$ .

**b) et c)** On obtient pour tableau de signes de  $f'(x)$  et tableau de variation de  $f$ :

$x$	0	$e^2$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f$			$-e^2$	

**3. a)**  $f(1) = -3$  donc, d'après le tableau de variation, pour tout réel  $x$  de  $[1; e^2]$ ,  $f(x)$  appartient à  $[-e^2; -3]$  donc l'équation  $f(x) = -5$  a une unique solution dans l'intervalle  $[1; e^2]$ .

Par ailleurs,  $f(15) > -5$  donc l'équation  $f(x) = -5$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[e^2; 15]$  d'après le tableau de variation précédent.

**b)** Par balayage à la calculatrice, on obtient pour valeur approchée à 0,1 près de ces deux solutions : 2,3 et 14,1.

**38 a)**  $4^n > 10^{10}$  si et seulement si  $n \geq \frac{10 \ln 10}{\ln 4}$ .

Or  $\frac{10 \ln 10}{\ln 4} \approx 16,6$  donc les solutions de  $4^n \geq 10^{10}$  sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 17.

**b)**  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-10}$  si et seulement si  $n \geq \frac{10 \ln 10}{\ln 3}$ .

Or  $\frac{10 \ln 10}{\ln 3} \approx 20,96$  donc les solutions de  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-10}$  sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 21.

**c)**  $0,7^n < 10^{-8}$  si et seulement si  $n > \frac{-8 \ln 10}{\ln 0,7}$ .

Or  $\frac{-8 \ln 10}{\ln 0,7} \approx 51,6$  donc les solutions de  $n > \frac{-8 \ln 10}{\ln 0,7}$  sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 52.

**39 a)**  $u_n = 2 \cdot 0,4^n$ .

**b)** On résout  $2 \times 0,4^n < 10^{-5}$ . On trouve  $n > \frac{\ln \frac{10^{-5}}{2}}{\ln 0,4}$  donc le plus petit entier  $n$  cherché est 14.

c) On résout  $2 \times 0,4^n < 10^{-p}$ . On trouve  

$$n > \frac{\ln \frac{10^{-p}}{2}}{\ln 0,4}$$
d'où l'existence de  $N$ .

d) Par définition de la limite, on en déduit que  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Ce résultat était prévisible car la raison de la suite géométrique de  $(u_n)$  est dans  $[0; 1[$ .

**40 a)**  $u_n = 4 \cdot 3^n$ .

b) On résout  $4 \times 3^n > 10^5$ . On trouve  $n > \frac{\ln \frac{10^5}{4}}{\ln 3}$   
donc le plus petit entier  $n$  cherché est 10.

c) On résout  $4 \times 3^n > 10^p$ . On trouve  $n > \frac{\ln \frac{10^p}{4}}{\ln 3}$   
d'où l'existence de  $N$ .

d) Par définition de la limite, on en déduit que  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Ce résultat était prévisible car la raison de la suite géométrique  $(u_n)$  est strictement supérieure à 1.

**42 a)**  $f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$  ;

b)  $f'(x) = \frac{-\frac{(3x+1)^2}{1}}{3x+1} = \frac{-3}{3x+1}$ .

**43 a)**  $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$  ;

b)  $f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2}$ .

**44 a)**  $f'(x) = \frac{\frac{(x+1)^2}{3x+2}}{\frac{x+1}{8}} = \frac{1}{(x+1)(3x+2)}$  ;

b)  $f'(x) = \frac{\frac{(2x+4)^2}{2x+4}}{(2x+4)(x-2)} = \frac{8}{(2x+4)(x-2)}$ .

**46 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = +\infty$   
et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) = 0$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$  ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 3$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$ .

**47 a)**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$  d'où deux asymptotes : la droite d'équation  $x = 1$  et l'axe des abscisses d'équation  $y = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$  car

$\lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x+1}{x-3} = \ln 2$  car

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$  d'où deux asymptotes :

les droites d'équation  $x = 3$  et  $y = \ln 2$ .

**48 a)**  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-3}{x+2} = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x+2} = 2$  d'où

deux asymptotes : les droites d'équation  $x = -2$  et  $y = \ln 2$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow 5} (3x+2) = 17$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln \frac{x-5}{3x+2} = -\ln 3$  car

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{3x+2} = \frac{1}{3}$  d'où deux asymptotes :

les droites d'équation  $x = 5$  et  $y = -\ln 3$ .

**49 a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

b) On en déduit que la courbe rouge est celle de  $f$ , la violette celle de  $g$  et la verte celle de  $h$ .

**50 a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  donc l'axe des abscisses est asymptote à la représentation graphique de  $f$  en  $+\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ln \frac{2}{5}$  donc la droite d'équation

$y = \ln \frac{2}{5}$  est asymptote à la représentation graphique de  $h$  en  $+\infty$ .

b) On en déduit que la courbe rouge est celle de  $f$ , la violette celle de  $g$  et la verte celle de  $h$ .

**51 a)** On conjecture que les droites d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées),  $y = 0$  (axe des abscisses) et  $x = 1$  sont trois asymptotes à la représentation graphique de  $f$ .

**b)** Cette conjecture est démontrée avec :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (la droite d'équation  $y = 0$  est bien asymptote) ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  (la droite d'équation  $x = 0$  est bien asymptote) et  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  (la droite d'équation  $x = 1$  est bien asymptote) .

**52 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2} = +\infty$  .

**b)** On en déduit que les droites d'équation  $y = 0$  (axe des abscisses) et  $x = -2$  sont asymptotes.

**2. a)**  $f'(x) = \frac{(x+2)^2}{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{4}{(x+2)(x-2)}$  . Or

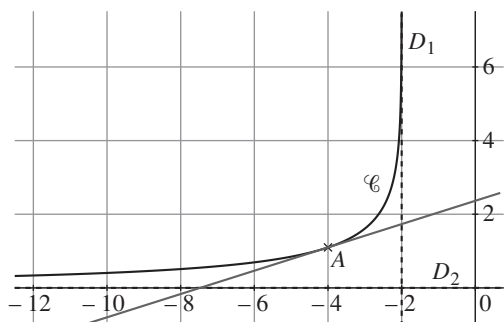
$x < -2$  donc  $(x+2)(x-2) > 0$  donc, pour tout  $x < -2$ ,  $f'(x) > 0$ . On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -2[$ .

**b)**

$x$	$-\infty$	$-2$
$f'(x)$		+
$f$	0	$+\infty$

**3.** On trace la tangente comme étant la droite passant par  $A(-4; \ln 3)$  et de coefficient directeur  $f'(-4) = \frac{1}{3}$  .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**53 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(6-x) = \ln 6$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 6} \ln(6-x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 6} \ln x = \ln 6$  .

**b)** On en déduit que les droites d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées) et  $x = 6$  sont des asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

**2. a)**  $f'(x) = \frac{-1}{6-x} - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{x-12}{x(6-x)}$  . Or  $0 < x < 6$  donc  $f'(x) < 0$ . On en déduit que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; 6[$ .

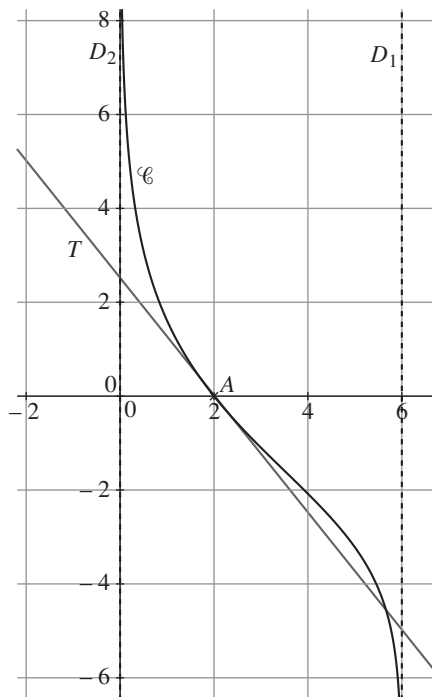
**b)**

$x$	0	6
$f'(x)$		+
$f$	$+\infty$	$-\infty$

**3. a)** L'équation équivaut à  $\ln(6-x) = \ln x^2$ ,  $x$  appartenant à  $]0; 6[$ . On résout alors  $6-x = x^2$  qui admet  $-3$  et  $2$  pour solutions. Comme  $x$  appartient à  $]0; 6[$ ,  $x_0 = 2$ .

**b)** On a :  $f'(2) = -\frac{5}{4}$  et  $f(2) = 0$  d'où l'équation réduite de la tangente  $T$  :  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$  .

**4.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**55 a)**  $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ .

**b)**  $F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**56 a)**  $F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**b)**  $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x + 1 = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**58 a)**  $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + 2 \ln x + k; k \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{3x} + k; k \in \mathbb{R}$ .

**59 a)**  $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3 \ln x + k; k \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k; k \in \mathbb{R}$ .

**61 a)**  $F(x) = \ln(x^2 + 3) + k, k \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(4x + 1) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**c)**  $F(x) = 2 \ln(x^2 + x + 1) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**62 a)**  $F(x) = 2 \ln(x - 1) + \frac{1}{x - 1} + k, k \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $F(x) = -3 \ln(x + 2) - \frac{1}{x + 2} + k; k \in \mathbb{R}$ .

**63 a)**  $F(x) = \frac{1}{5} \ln(5x + 1) - \ln x + k, k \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $F(x) = -\frac{1}{x} - 3 \ln(3x - 1) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**64 a)**  $G(x) = 2 \ln(x - 3)$ .

**b)**  $F(x) = x^2 - 5x - 2 \ln(x - 3) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**65 a)**  $G(x) = \frac{1}{2} \ln(2x - 3)$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{2} \ln(2x - 3) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**66 a)**  $G(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2)$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + k; k \in \mathbb{R}$ .

**68**  $F(x) = \frac{5}{2} \ln(x^2 - 1) + k; k \in \mathbb{R}$ .

Or  $F(2) = \ln 3$  donc  $\frac{5}{2} \ln 3 + k = \ln 3$  d'où

$k = -\frac{3}{2} \ln 3$  donc  $F(x) = \frac{5}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{3}{2} \ln 3$ .

**69 a)**  $h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = 2 \frac{\ln x}{x}$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k; k \in \mathbb{R}$ .

Or  $F(1) = 0$  d'où  $k = -\frac{1}{6}$

donc  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{6}$ .

**71 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  : la

droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

**b)** On lève l'indétermination en factorisant par

$x$  :  $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**72 a)** On lève l'indétermination en factorisant par

$x$  :  $f(x) = x \left(3 - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)** On lève l'indétermination en factorisant par

$x^3$  :  $f(x) = x^3 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 1\right)$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**73 a)** On a :  $f(x) = x \left(4 \frac{\ln x}{x} - 1\right)$ . Or

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . De plus,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  donc l'axe des ordonnées d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**b)**  $f'(x) = \frac{4}{x} - 1 = \frac{4 - x}{x}$ .

**c)** Comme  $x > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $4 - x$ . D'où le tableau de signes de  $f'(x)$  et tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f$	$-\infty$	$4 \ln 4 - 4$	$-\infty$	

**d)** On déduit du tableau de variation que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions

dans  $]0; +\infty[$  : l'une dans  $]0; 4[$  et l'autre dans  $]4; +\infty[$ . D'où le résultat.

e) Valeurs approchées à  $10^{-2}$  près : 1,43 et 8,61.

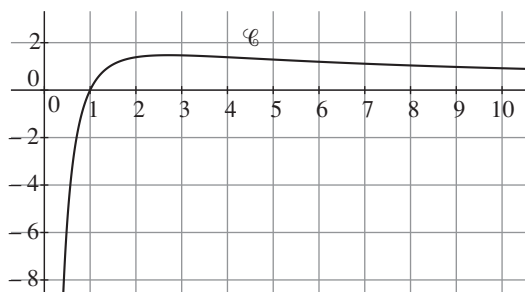
**74 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  donc l'axe des ordonnées d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

**b)**  $f'(x) = 4 \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

**c)** Comme  $x^2 > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \ln x$ . D'où le tableau de signes de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f$	$-\infty$	$\frac{4}{e}$	0

**d)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**75**  $h(1) = -1$  donc la courbe proposée n'est pas celle de  $h$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2}$  donc la courbe proposée est celle de  $f$ .

## Problèmes

**79 1.** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  avec  $x^2 > 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$  soit  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe  $C$ .

**2.** D'après le cours, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$  donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . On en déduit que la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe  $C$  en  $+\infty$ .

**3. a)** Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :

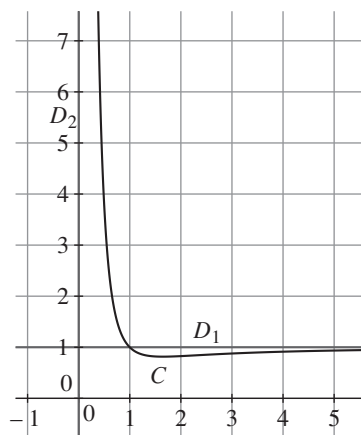
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

**b)** L'inéquation  $2 \ln x - 1 > 0$  existe si et seulement si  $x > 0$  et équivaut à  $\ln x > \frac{1}{2} \ln e$  soit  $x > \sqrt{e}$  donc l'inéquation proposée admet pour  $]\sqrt{e}; +\infty[$  ensemble de solutions.

**3. c)** et **4.** On en déduit le tableau de signes de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f$	$+\infty$	$1 - \frac{1}{2e}$	1

**5.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée



**80 1.** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**2.** Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x^2 \left( \frac{3}{2} - \ln x + \frac{1}{x^2} \right)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} - \ln x + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ .



Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**3. a)** Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{3}{2} \times 2x - \left( 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right)$$

$$= 2x - 2x \ln x = 2x(1 - \ln x).$$

**b)** Comme  $x > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $(1 - \ln x)$ . On en conclut que si  $x < e$ ,  $f'(x) > 0$ , si  $x = e$ ,  $f'(x) = 0$  et si  $x > e$ ,  $f'(x) < 0$ .

**4.** On en déduit le tableau de variation de  $f$ :

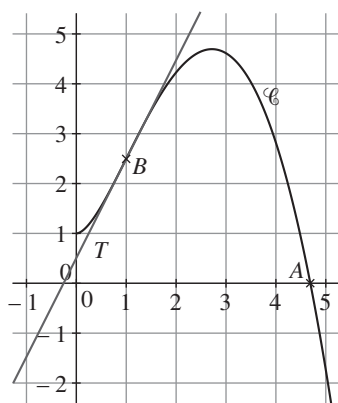
$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f$	1	$\frac{1}{2}e^2 + 1$	$-\infty$

**5. a)** Pour tout  $x$  de  $]0 ; e]$ ,  $f(x) \in \left] 1; \frac{1}{2}e^2 + 1 \right]$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution sur  $]0 ; e]$ . Par ailleurs, par lecture du tableau de variation précédent, cette équation admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]e ; +\infty[$ . D'où le résultat.

**b)** Par balayage à la calculatrice, on a :  $4,6 < \alpha < 4,7$ .

**6.** On trace la courbe  $C$ , le point  $A$  de  $C$  d'abscisse  $\alpha$  et la tangente  $T$  à  $C$  au point d'abscisse 1 comme droite passant par le point  $B\left(1; \frac{5}{2}\right)$  et de coefficient directeur  $f'(1) = 2$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**81 A 1.** Pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

**2. a)** Pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x)$  est du signe de  $x - 1$ . On en conclut que si  $x < 1$ ,  $g'(x) < 0$ , si  $x = 1$ ,  $g'(x) = 0$  et si  $x > 1$ ,  $g'(x) > 0$ .

**b)** On en déduit le tableau de variation de  $g$ :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +
$g$			4

**3.** D'après **2. b)**, le minimum de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  est 4 donc, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

**B 1.** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  avec  $x > 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe  $C$ .

Par ailleurs, d'après le cours, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**2.** Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + 2 \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 + 2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

**3. a)** Un carré étant toujours positif,  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$  donc, d'après la question **3.** de la **partie A**, on a : pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .

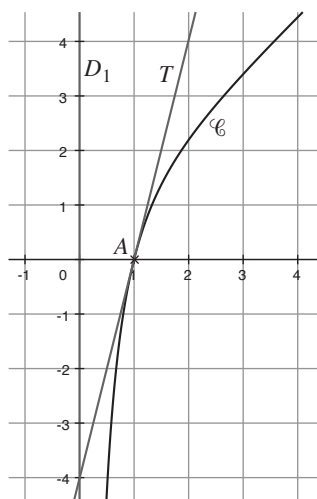
**b)** On obtient alors le tableau de variation de  $f$ :

$x$	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

**c)** On a :  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 4$ .

**d)** On construit la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1 comme la droite passant par le point  $A(1 ; 0)$  et de coefficient directeur 4, puis on construit  $C$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**82 1. a)** La fonction associée à la courbe verte est positive sur  $]1; +\infty[$  donc la dérivée de cette fonction est croissante sur  $]1; +\infty[$ . Par ailleurs, la fonction associée à la courbe bleue est négative sur  $]1; a]$  avec  $a \approx 2,8$  et positive sur  $[a; +\infty[$  donc la dérivée de cette fonction est décroissante sur  $]1; a]$  et croissante sur  $[a; +\infty[$ . On en déduit que la courbe bleue correspond à  $f$ , la courbe rouge à  $F$  et la courbe verte à  $f'$ .

**b)** On a donc :  $F(2) = -5$ .

**2. a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) = -\infty. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty. \text{ On en déduit que la droite}$$

d'équation  $x = 1$  est asymptote à la courbe  $C$ .

**b)** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

**c)** Pour tout  $x$  de l'intervalle  $]1; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

**d)** Comme  $x > 1$ , on déduit de la question précédente le signe de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$ :

$x$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

**3. a)** La dérivée de la fonction

$$x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x \text{ est}$$

$$x \mapsto \ln(x-1) + (x-1) \times \frac{1}{x-1} - 1 = \ln(x-1)$$

d'où le résultat.

**b)** On en déduit que les primitives de la fonction  $f$  sur  $]1; +\infty[$  sont les fonctions

$$F_k : x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x - \ln(x-1) + k$$

$$= (x-2)\ln(x-1) - x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

**c)** On cherche  $k$  tel que  $F_k(2) = -5$  donc, avec l'expression précédente, on a  $k = -3$  donc  $F(x) = (x-2)\ln(x-1) - x - 3$ .

**83 1. a)** ch4\_ex83.ggb

**b)** On conjecture alors que :

- \* la limite en  $+\infty$  de  $f_a$  est  $+\infty$  ;
- \* la limite en 0 de  $f_a$  est  $-\infty$  pour  $a \geq 0$  et  $+\infty$  si  $a < 0$  ;
- \* le point  $A(1; 1)$  est commun à toutes les courbes  $C_a$ .

**2. \*** Pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = x \left( a \frac{\ln x}{x} + 1 \right). \text{ Or, d'après le cours,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a \frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

\* Pour  $a \geq 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} a \ln x = -\infty ; \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty ;$$

Pour  $a < 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} a \ln x = +\infty ; \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

\* Pour tout réel  $a$ , on a :  $f(1) = a \ln 1 + 1 = 1$  donc le point  $A(1; 1)$  est commun à toutes les courbes  $C_a$ .

**84 1.** Pour tout  $x$  de  $]3; +\infty[$ ,

$$f(x) = \frac{x+2-(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{5}{(x-3)(x+2)}.$$

Or  $x > 3$  donc  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$ . d'où le tableau de signes de  $f(x)$  :


$x$	3	$+\infty$
$f(x)$		+

**b)** Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $F' = f$  donc  $F'$  est positive sur  $I$  : toute primitive  $F$  de  $f$  est croissante sur  $I$ .

c) Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \ln(x-3) - \ln(x+2) + k = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) + k$$

avec  $k$  réel.

2.  ch4\_ex84.ggb

3. a) Toutes les courbes  $C_k$  obtenues semblent avoir deux asymptotes : l'une d'équation  $y = k$  et l'autre d'équation  $x = 3$ .

b) \* On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = 0$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = k$  :

la droite d'équation  $y = k$  est asymptote à la courbe  $C_k$  en  $+\infty$  ;

\* On a :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = -\infty$

d'où  $\lim_{x \rightarrow 3} f_k(x) = -\infty$  : la droite d'équation  $x = 3$  est asymptote à la courbe  $C_k$ .

4. Comme  $F_k$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , on déduit de question 1. a) le tableau de variation de  $F_k$  :

$x$	3	$+\infty$
$F'_k(x)$		+
$F_k$	$-\infty$	$k$

On déduit du tableau précédent qu'on doit prendre  $k$  négatif ou nul pour que  $F_k$  soit strictement négative sur  $I$ .

85 On a :  $f'(x) = \frac{1}{x} + a$ . Or  $f'(2) = 0$

donc  $a = -\frac{1}{2}$ . Par ailleurs,  $f(1) = -\frac{3}{2}$

et  $f(1) = \ln 1 + a + b$  donc  $b = -1$ .

On en déduit que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x - 1.$$

Sur cette expression, on trouve les résultats manquants dans le tableau :

\* pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$  donc

$f'$  est positive sur  $]0 ; 2]$  et négative sur  $[2 ; +\infty[$  d'où  $f$  est croissante sur  $]0 ; 2]$  et décroissante sur  $[2 ; +\infty[$  ;

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}x\right) = 0$

d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = -\infty$  ;

\* on a :  $f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$ .

Or, d'après le cours, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = -\infty$  ;

\* on a :  $f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} \times 2 - 1 = \ln 2 - 2$ .

On en déduit le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\ln 2 - 2$	$-\infty$

86 On a :  $f(1) = 1$  donc  $a = 1$ . Par ailleurs,  $f'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $C$  en  $A$  qui coupe l'axe des abscisses en  $B'(2 ; 0)$ . Or cette tangente a pour coefficient directeur  $-1$  donc  $f'(1) = -1$ . Enfin,

$$f'(x) = a + \frac{b}{x} \text{ d'où } f'(1) = a + b = -1$$

soit  $b = -2$  et  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

Comme la courbe  $C$  passe par un point  $B$  et admet en ce point une tangente parallèle à  $(Ox)$ , on a :

$$f'(x_B) = 0 \text{ soit } 1 - \frac{2}{x_B} = 0 \text{ donc } x_B = 2$$

et  $y_B = f(2) = 2 - 2 \ln 2$ .

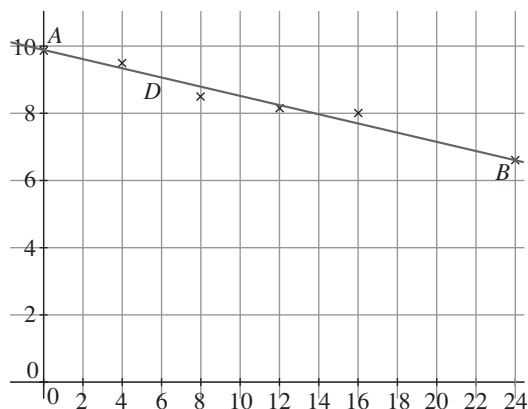
87 1. a) En arrondissant les valeurs à  $10^{-1}$  près, on a :

$t$	0	4	8	12	16	20	24
$y = \ln(N)$	9,9	9,5	8,6	8,2	8,0	7,1	6,7

b) On place les points de coordonnées  $(t ; y)$  pour chacun des couples du tableau de la question

1. a).

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



c) La droite  $D$  a pour coefficient directeur

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{3,2}{24} = -\frac{2}{15} \text{ et pour ordonnée à l'origine } 9,9 \text{ donc pour équation } y = -\frac{2}{15}x + 9,9.$$

En traçant la droite  $D$  sur le graphique précédent, on constate que cette droite approxime « correctement » le nuage de points du graphique.

2. a) Il s'agit de résoudre l'équation  $-0,13t + 9,9 = \ln 10000$  soit

$$t = \frac{-9,9 + \ln 10000}{-0,13} \approx 5,3 \text{ donc il faut environ } 5,3 \text{ h à l'opérateur pour rétablir l'alimentation en électricité de 50\% des foyers sinistrés donc l'objectif « moins de 6 h » est atteint.}$$

b) Par définition, on a  $-0,13t_1 + 9,9 = \ln N$  et  $-0,13t_2 + 9,9 = \ln \frac{N}{2}$

$$\text{d'où, par soustraction, on a :}$$

$$(-0,13t_1 + 9,9) - (-0,13t_2 + 9,9) = \ln N - \ln \frac{N}{2}$$

$$\text{soit } 0,13(t_2 - t_1) = \ln 2$$

$$\text{d'où } t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{0,13} \approx 5,3 \text{ h.}$$

D'où la conclusion avec la question 2. a).

**88 1. a)** On a :  $N(I_0) = 10 \log \left( \frac{I_0}{I_0} \right) = 0.$

b) Le niveau sonore correspondant en dB est

$$N(I_0) = 10 \log \left( \frac{I_0 \times 10^{17}}{I_0} \right) = 170.$$

c) Pour un marteau-piqueur, on a  $N(I) = 110$  donc

$$10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 110 \text{ soit } I = 10^{11} I_0.$$

**2. a)** On a :  $N(I_c) = 60$  donc  $10 \log \left( \frac{I_c}{I_0} \right) = 60$  soit

$$I_c = 10^6 I_0. \text{ De même, } I_t = 10^8 I_0. \text{ On a alors :}$$

$$N(I) = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{I_c}{I_0} + \frac{I_t}{I_0} \right) = 10 \log (10^6 + 10^8) \approx 80,04 \text{ dB à } 0,01 \text{ près.}$$

Les niveaux sonores (60dB et 80dB) ne s'additionnent donc pas.

b) En réitérant le raisonnement précédent, le niveau sonore correspondant au passage simultané de deux voitures est donc :

$$N(I) = 10 \log \left( \frac{I_v}{I_0} + \frac{I_v}{I_0} \right) = 10 \log (10^8 + 10^8) = 10 (\log 2 + 8) = 80 + 10 \log 2 \approx 83,01 \text{ dB à } 0,01 \text{ près.}$$

**89 1. a)** Pour passer du La de l'octave  $n$  au La de l'octave  $n+1$ , on multiplie la fréquence  $f_n$  du premier par 2. On a alors  $f_{n+1} = 2f_n$ . Donc la suite  $(f_n)$  est une suite géométrique de raison 2 avec  $f_3 = 440$  Hz. D'où  $f_n = 440 \times 2^{n-3}$ .

b) L'inéquation  $440 \times 2^{n-3} > 20000$  équivaut à

$$2^{n-3} > \frac{20000}{440} = \frac{500}{11} \text{ d'où } n > 3 + \frac{\ln \frac{500}{11}}{\ln 2}.$$

Comme  $3 + \frac{\ln \frac{500}{11}}{\ln 2} \approx 8,5$ , le numéro de l'octave du La le plus aigu audible par l'homme est 8.

2. a) On a :  $q^{12} = 2$  donc  $12 \log q = \log 2$  soit

$$\log q = \frac{1}{12} \log 2.$$

b) On appelle  $f_1$  la fréquence du Mi et  $f_2$  celle du Do. Par définition,  $f_1 = q^4 f_2$  (comme  $q > 1$  de par sa définition, on a bien  $f_1 > f_2$ ) donc la différence de hauteur cherchée est, en savarts,

$$1000 \log q^4 = 4000 \cdot \frac{1}{12} \log 2 = \frac{1000}{3} \log 2 \approx 100 \text{ à l'unité près.}$$

**90** On a  $M_1 = \frac{2}{3} \log(E_1) - 2,88$  et

$$M_2 = \frac{2}{3} \log(E_2) - 2,88 \text{ donc, par soustraction,}$$

$$M_2 - M_1 = \frac{2}{3} \log E_2 - \frac{2}{3} \log E_1 = \frac{2}{3} \log \left( \frac{E_2}{E_1} \right).$$

b) On déduit du a) que  $M_J - M_H = \frac{2}{3} \log \left( \frac{E_J}{E_H} \right)$

d'où  $\log\left(\frac{E_J}{E_H}\right) = 3$  soit  $\frac{E_J}{E_H} = 10^3$ .

D'après le raisonnement précédent, l'énergie sismique est multipliée par  $10^3 = 1\,000$  lorsque la magnitude est augmentée de 2 degrés.

**c)** En notant  $M_A$  la magnitude du séisme d'Aquila,

on a :  $M_J - M_A = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E_J}{E_A}\right) = \frac{2}{3} \log 10 = \frac{2}{3}$

donc  $M_A = M_J - \frac{2}{3} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3} \approx 8,3$  au dixième près.

**91 1. a)** On a :  $P_2 = 0,98P_1$ . On en déduit :

$G_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log 0,98 \approx -0,09$  à 0,01 près.

**b)** S'il y a atténuation de la puissance, on a :

$\frac{P_2}{P_1} < 1$  donc  $\log \frac{P_2}{P_1} < 0$  soit  $G_{dB} < 0$ . De même, s'il y a augmentation du signal, on a :  $G_{dB} > 0$ .

**2. a)** On a :  $\frac{P_5}{P_1} = \frac{P_5}{P_4} \cdot \frac{P_4}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = G_4 G_3 G_2 G_1$

donc  $G_{dB} = G_{4dB} + G_{3dB} + G_{2dB} + G_{1dB}$ .

**b)** On a :

$G_{dB} = G_{4dB} + G_{3dB} + G_{2dB} + G_{1dB}$   
 $= -1,7 \times 2 + (-10) + (-1,7 \times 8) + 37$   
 $= 10 \text{ dB}.$

On en déduit que  $10 \log \frac{P_5}{P_1} = 10$

soit  $P_5 = P_1 = 10^{-2} \mu\text{W} \cdot 1,58 \cdot 10^{-3} \mu\text{W}$ . On en conclut qu'avec cette installation, on a une puissance  $P_5$  suffisante.

**92 1. B ; 2. C ; 3. A ; 4. C.**

**93 A 1. a)** À partir des informations sur  $C_g$ , on

a :  $g(1) = 3$  et  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

**b)** Par lecture graphique, on conjecture que  $g(x)$  est positif pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

**2. a)** On a :  $g(1) = a + 2 = 3$  donc  $a = 1$ .

Par ailleurs,  $g'(x) = \frac{b}{x} + 4x$  et  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

donc  $b = -1$ .

On en conclut que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$ .

**3. a)**  $g'(x) = -\frac{1}{x} + 4x$   
 $= \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x}$ .

Or  $x$  appartient à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $(2x - 1)$ . On en conclut que, pour  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $g'(x) < 0$ , pour  $x = \frac{1}{2}$ ,

$g'(x) = 0$  et pour  $x > \frac{1}{2}$ ,  $g'(x) > 0$ .

**b)** On en déduit le tableau de variation de  $g$  :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g$		$\searrow \frac{3}{2} + \ln 2 \nearrow$	

**c)** On en déduit que le minimum de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  est  $\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$  donc  $g(x)$  est positif pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

**B 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  avec  $x > 0$ ,

d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe  $C_f$ .

Par ailleurs, d'après le cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**2.** Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} + 2$   
 $= \frac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$

**3. a)** Comme  $g(x)$  est positif pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , on en conclut que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

est positif pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

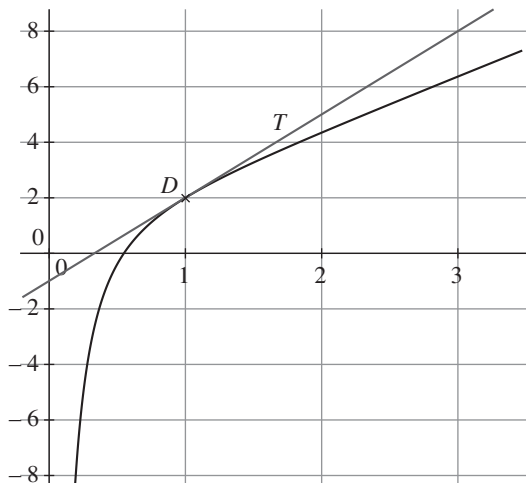
**b)** On déduit de la question **a)** le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

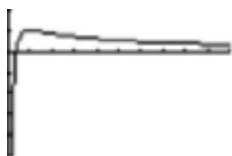
**4. a)** On a :  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = 3$ .

**b)** On construit la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 1 comme la droite passant par le point  $D(1; 2)$  et de coefficient directeur 3. On construit ensuite  $C_f$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**94 1. a)** En prenant  $X$  entre 0 et 10 et  $Y$  entre  $-5$  et 2, on obtient :



**b)** On conjecture alors le tableau de variation de la fonction  $f$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\infty$	1	0

**2. a)** Pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}.$$

Un carré étant toujours positif, on en déduit que  $f'(x)$  est du signe de  $-\ln x$ .

**b)** On déduit de la question **a)** les variations de la fonction  $f$  :  $f'$  est positive sur  $]0; 1]$  et négative sur  $[1; +\infty[$  d'où  $f$  est croissante sur  $]0; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

**c)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  avec  $x > 0$ ,

d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

Par ailleurs, d'après le cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**3. a)** On a :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1 + \ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \left(1 - \frac{1}{2} \ln e\right) = \frac{1}{2} \sqrt{e}.$$

D'où le résultat.

**b)** Le coefficient directeur de la droite  $(OA)$  est

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{e}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2} e \text{ et celui de la tangente à } C$$

$$\text{en } A \text{ est } f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = e \left(\frac{1}{2} \ln e\right) = \frac{1}{2} e$$

d'où le résultat.

**95 1. a)** On conjecture que le point  $A(1; -1)$  appartient à toutes les courbes  $C_k$ .

**b)** Pour tout réel  $k > 0$ , on a :

$f_k(1) = 2k \ln 1 - 1^2 = -1$  d'où la confirmation de la conjecture précédente.

**2. a)** On conjecture que l'axe des ordonnées est une asymptote commune à toutes les courbes  $C_k$ .

**b)** Pour tout réel  $k > 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} k \ln x = -\infty$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

D'où la confirmation de la conjecture.

**3. a)** Pour tout réel strictement positif  $k$ ,

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \frac{2k}{x} - 2x = \frac{2(k - x^2)}{x} \\ &= \frac{2(\sqrt{k} + x)(\sqrt{k} - x)}{x}. \end{aligned}$$

Or  $x > 0$  donc  $f'_k(x)$  est du signe de  $(\sqrt{k} - x)$ . On en conclut que pour  $0 < x < \sqrt{k}$ ,  $f'_k(x) > 0$ , pour  $x = \sqrt{k}$ ,  $f'_k(x) = 0$  et pour  $x > \sqrt{k}$ ,  $f'_k(x) < 0$ . Conclusion :  $f_k$  admet un maximum sur  $]0; +\infty[$ , atteint en  $\sqrt{k}$ .

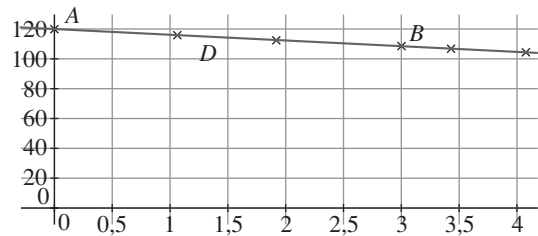
**b)** Le sommet de la courbe rouge a pour abscisse 2 donc  $\sqrt{k} = 2$  soit  $k = 4$ . Le maximum de la

fonction représentée par cette courbe est alors  $f_4(2) = 8 \ln 2 - 4$ .

**96 1. a)** En arrondissant les valeurs à  $10^{-1}$  près, on a :

$x = \ln t$	0	1,1	1,9	3,0	3,4	4,1
Température $\theta$ en degrés Celsius	120	117	114	111	110	108

**b)** On représente les points de coordonnées  $(\ln(t) ; \theta)$  pour chacun des couples du tableau de la question **a)**. Les points semblent quasiment alignés.  
La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**c)** La droite passant par les points  $A (0 ; 120)$  et  $B (3 ; 111)$  a pour ordonnée à l'origine 120 et pour coefficient directeur  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -3$  donc a pour équation  $y = -3x + 120$ .

**2. a)** Si  $t = 2$  alors  $\theta = 120 - 3 \ln 2 \approx 118^\circ\text{C}$  au degré près.  
**b)** On a :  $\theta_1 = 120 - 3 \ln t_1$  et  $\theta_2 = 120 - 3 \ln(2t_1)$ . Par soustraction, on obtient :  $\theta_2 - \theta_1 = -3 \ln 2$ . Si on double le temps d'exposition à la chaleur alors on peut baisser la température de  $3 \ln 2 \approx 2,1^\circ\text{C}$  à  $0,1^\circ\text{C}$  près pour détruire 90 % des micro-organismes.

# Fonction exponentielle

## Activités

### Activité 1 Mémoire vive

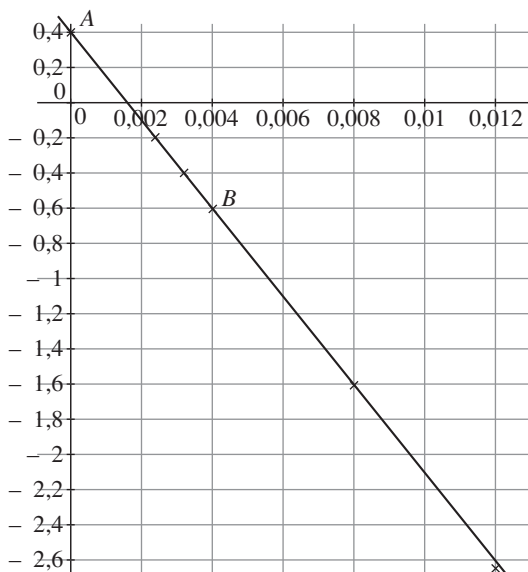
Dans cette activité, on établit une relation entre le logarithme népérien d'une tension et le temps, et cela dans un contexte concret. On utilise alors ce lien pour obtenir le temps, connaissant la tension. À la dernière question, on voit qu'on ne dispose pas des outils pour déterminer la tension, connaissant le temps. On justifie ici ainsi l'intérêt de définir la fonction réciproque de la fonction  $\ln$ .

❶ Les points obtenus ne sont pas alignés donc on ne peut pas envisager de modéliser la situation à l'aide d'une fonction affine.

❷ a)

$t$	0	$0,8 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$12 \cdot 10^{-3}$
$y = \ln(u_C)$	0,405	0,207	0,010	-0,198	-0,400	-0,598	-1,609	-2,659

b) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



Les points semblent alignés.



**c)** On obtient pour équation de  $(AB)$  :  $y = -250,75t + 0,405$ .

Cette droite  $(AB)$  semble constituer une approximation satisfaisante du nuage de points.

**3 a)** L'inéquation équivaut à :  $\frac{0,405 - \ln(0,75)}{250,75} \geq t$  donc l'inéquation admet  $\left[0; \frac{0,405 - \ln(0,75)}{250,75}\right]$  pour

ensemble de solutions. De plus,  $T = \frac{0,405 - \ln(0,75)}{250,75} \approx 0,0028$ . On doit rafraîchir les informations toutes les 2,8 ms.

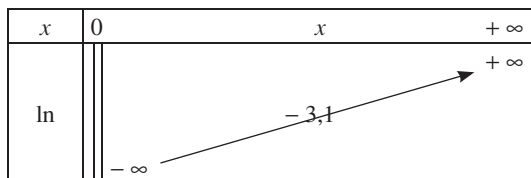
**b)** Pour  $t = 2.10^{-3}$ , on obtient  $\ln(u_C) = -0,0965$ . À ce stade du cours, on ne peut pas en déduire la valeur de  $u_C$  correspondante.

## Activité 2 En marche arrière, jusqu'à en perdre l'n

Dans cette activité, on s'intéresse à la fonction  $u$ , réciproque de la fonction  $\ln$ . À l'aide de GéoGebra, on découvre et on exploite le lien entre la courbe de la fonction  $\ln$  et la courbe de cette fonction  $u$  encore inconnue. On conjecture ainsi un certain nombre des résultats sur la fonction exponentielle qui seront démontrés dans le cours.

**A 1 a)**  $x = e^2$ . **b)**  $x = 1$ . **c)**  $x = e^{-3}$ .


**2 a)**



**b)** D'après le tableau de variation de la fonction  $\ln$ , il existe un unique réel strictement positif  $x$  tel que  $\ln x = -3,1$ . De plus,  $x \approx 0,05$ .

**3 a)** D'après le tableau de variation de la fonction  $\ln$ , pour tout réel  $b$ , il existe un unique réel strictement positif  $a$  tel que  $\ln a = b$ .

**b)**  $u(2) = e^2$ ,  $u(0) = 1$  et  $u(-3) = e^{-3}$ .

**B 1**  ch5\_act2.ggb

**b)** Les points  $A$ ,  $B$  et  $E$  appartiennent à la courbe  $C$  car, par exemple pour le premier point, on a :  $\ln e^2 = 2$ .

**c)** Les points  $A'$ ,  $B'$  et  $E'$  appartiennent à la courbe  $\Gamma$  car, par exemple pour le premier point, on a :  $u(2) = e^2$ .

**e)** Le point  $M'$  appartient à la courbe  $\Gamma$  car  $u(y(M)) = x(M)$ .

**f)** Il suffit de regarder l'ordonnée du point de  $\Gamma$  d'abscisse  $-3,1$ .

**g)** Une équation de  $\Delta$  est  $y = x$ .

**2 a)**  $\exp(2) = e^2$ ,  $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(-3) = e^{-3}$  et  $\exp(-3,1) \approx 0,05$ .

**3** On conjecture que :

**a)** la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  ;

**c)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ .

## TP 1 Quand l'exponentielle change de base

Dans la partie A, on aborde, dans le contexte de calculs de pH, la notion d'un réel mis à une puissance réelle. Dans cette partie, il ne s'agit que de puissance réelle de 10. On établit en particulier le lien entre le logarithme décimal et les puissances de 10, utile dans de nombreux domaines, et on utilise ce lien pour calculer le pH d'un mélange.

Dans la partie B, on généralise la notation  $a^x$  et on l'applique dans un autre contexte, dans lequel ce sont les puissances de 2 qui sont utiles.

**A 1 a)** L'équation s'écrit :  $\frac{\ln[\text{H}_3\text{O}^+]}{\ln 10} = -7$ , elle est équivalente à  $\ln[\text{H}_3\text{O}^+] = \ln 10^{-7}$ ,  
soit  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}$ .

**b)** L'équation s'écrit :  $\frac{\ln[\text{H}_3\text{O}^+]}{\ln 10} = -11$ , elle est équivalente à  $\ln[\text{H}_3\text{O}^+] = \ln 10^{-11}$ ,  
soit  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11}$ .

**c)** L'équation s'écrit :  $\frac{\ln[\text{H}_3\text{O}^+]}{\ln 10} = -2,5$ , elle est équivalente à  $\ln[\text{H}_3\text{O}^+] = -2,5 \ln 10$ ,  
soit  $[\text{H}_3\text{O}^+] = e^{-2,5 \ln 10}$ .

On ne peut donner cette concentration sous la forme d'une puissance de 10 puisque seules les puissances entières ont un sens.

**2 a)** L'équation s'écrit :  $\frac{\ln x}{\ln 10} = a$ , elle est équivalente à  $\ln x = a \ln 10$ , soit  $x = e^{a \ln 10}$ .

**b)**  $\log b = 5$  équivaut à  $b = e^{5 \ln 10} = 10^5$ ;  $\log x = -3,2$  équivaut à  $x = e^{-3,2 \ln 10} = 10^{-3,2}$ ;  
 $x = 10^{1,5}$  équivaut à  $\log x = 1,5$ ;  $x = 10^{-0,3}$  équivaut à  $\log x = -0,3$ ;

$\log x = \frac{1}{3}$  équivaut à  $x = e^{\frac{1}{3} \ln 10} = 10^{\frac{1}{3}}$ ;  $x = 10^\pi = e^{\pi \ln 10}$  équivaut à  $\log x = \pi$ .

**c)**  $[\text{H}_3\text{O}^+] = e^{-2,5 \ln 10} = 10^{-2,5}$ .

**3 a)**  $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{C}} = 10^{-5}$  et  $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{L}} = 10^{-6,5}$ .

**b)** Dans 2 litres de mélange, il y a  $10^{-5} + 10^{-6,5}$  moles de  $\text{H}_3\text{O}^+$ .

La concentration en moles par litre est alors  $\frac{1}{2}(10^{-5} + 10^{-6,5}) \approx 5,16 \times 10^{-6}$ .

**c)** Le pH du mélange est alors  $-\log\left(\frac{1}{2}(10^{-5} + 10^{-6,5})\right) \approx 5,3$ . On peut faire remarquer aux élèves qu'il ne s'agit pas de la moyenne des pH du café et du lait, bien que l'on ait fait un mélange à égalité de volume.

**B 1 a)**  $N(T) = N_0 \cdot 2^{-1} = \frac{N_0}{2}$ . En effet, on a bien toutes les propriétés déjà connues pour les puissances, en particulier :  $2^{-1} = e^{-\ln 2} = e^{\frac{\ln 1}{2}} = \frac{1}{2}$ .

**b)**  $N(t+T) = N_0 2^{-\frac{t+T}{T}} = N_0 2^{-\frac{t}{T}-1} = N_0 e^{\left(-\frac{t}{T}-1\right) \ln 2} = N_0 e^{-\frac{t}{T} \ln 2} \times e^{-\ln 2} = N_0 \frac{e^{-\frac{t}{T} \ln 2}}{2} = \frac{1}{2} N(t)$ .

**c)** Le nombre  $T$  est appelé demi-vie car le nombre d'atomes radioactifs est divisé par 2 après un temps  $T$ , quel que soit l'instant de départ considéré et le nombre d'atomes radioactifs à cet instant.

- 2  $N(6) = N_0 2^{-\frac{6}{13,2}}$ , donc la proportion de noyaux radioactifs sur la thyroïde au moment de l'examen est  $2^{-\frac{6}{13,2}} \approx 0,73$ , soit environ 73 % des noyaux radioactifs absorbés.

## TP 2 Une croissance exponentielle ?

Dans ce TP, on utilise la fonction exponentielle pour étudier deux modèles très connus d'évolution d'une population. Le premier est un modèle de croissance exponentielle. Le deuxième utilise également la fonction exponentielle, mais ne correspond pas à ce que l'on appelle couramment une « croissance exponentielle ». C'est l'occasion de préciser le sens de cette expression souvent mal utilisée dans les médias et ce qu'elle sous-entend dans le langage courant.

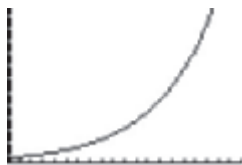
A 1  $P(t) = 15e^{0,02t}$ .

2  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = +\infty$ .

3 On a  $P'(t) = 15 \cdot 0,02e^{0,02t} = 0,3e^{0,02t}$ . Pour tout  $t$  de  $[0; +\infty[$ ,  $P'(t) > 0$ , donc la fonction  $P$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$t$	0	$+\infty$
$P(t)$		+
$P$	15	$+\infty$

4



5  $P(100) = 15e^2 \approx 111$  ;  $P(500) = 15e^{10} \approx 330\,397$  ;  $P(1000) = 15e^{20} \approx 7,28 \times 10^9$ .

B 1 a)  $P(0) = \frac{K}{1 + \frac{K}{P_0} - 1} = P_0$ .

b) Pour  $r > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$ .

2 a)  $P(t) = \frac{650}{1 + 64e^{-0,5t}}$ .

b)

$t$	0	4	8	12	16	20
$P(t)$	10	67	299	561	636	648

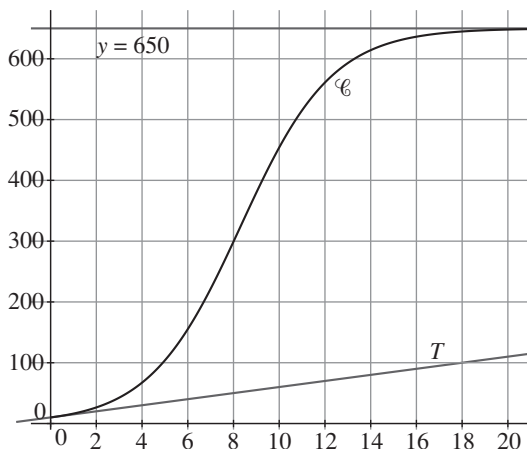
c)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 650$ . La population se stabilise autour de 650 individus par  $\text{cm}^3$  après un temps « suffisamment long ». On n'a pas encore étudié le sens de variation, il s'agit d'interpréter une limite, on peut faire appel à la définition : le nombre d'individus par  $\text{cm}^3$  peut être rendu aussi proche que l'on veut de 650 si on attend suffisamment longtemps.

d)  $P'(t) = \frac{20800e^{-0,5t}}{(1 + 64e^{-0,5t})^2}$ . Pour tout  $t$  de  $[0; +\infty[$ ,  $P'(t) > 0$ , donc la fonction  $P$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

e) La population augmente et tend vers 650 millions d'individus.

f) Le coefficient directeur de  $T$  est  $P'(0) = \frac{20800}{65^2} = \frac{64}{13} \approx 4,92$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



g) Graphiquement, on obtient environ 10,8.

L'inéquation  $P(t) > 500$  équivaut à  $e^{-0,5t} < \frac{3}{640}$ , soit encore  $t > -2 \ln\left(\frac{3}{640}\right)$ . La population dépasse

500 individus par  $\text{cm}^3$  à partir de l'instant  $t_0 = -2 \ln\left(\frac{3}{640}\right) \approx 10,7$  h.

# Exercices

**2 a)**  $S = \emptyset$  ; **b)**  $S = \{e^{-4}\}$  ;  
**c)**  $S = \{e^{\frac{1}{3}}\}$  ; **d)**  $S = \emptyset$ .

**3 a)**  $S = \{e^{-\frac{9}{2}}\}$  ; **b)**  $S = \{e^2\}$  ;  
**c)**  $S = \left\{\ln\left(\frac{21}{4}\right)\right\}$  ; **d)**  $S = \{(\ln(14))\}$ .

**4 a)**  $S = \emptyset$  ; **b)**  $S = \{e^{-\frac{2}{3}}\}$  ;

**c)**  $S = \left\{\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$  ; **d)**  $S = \{e^{\frac{24}{7}}\}$ .

**6 a)**  $S = \left] \frac{1 - \ln 2}{3} ; +\infty \right[$  ;

**b)**  $S = ]-\infty ; -\ln 2[$  ;

**c)**  $S = \left] -\infty ; \frac{\ln 7}{5} \right[$  ;

**d)**  $S = \left] -\infty ; \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right[$ .

**8 a)**

$x$	$-\infty$	$\frac{\ln 6}{3}$	$+\infty$
$-e^{3x} + 6$		+	-

**b)**

$x$	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$
$-2e^x + 3$		+	-

**9 a)** Cette expression est une somme de termes positifs sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc positive sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Cette expression est une somme de termes négatifs sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc négative sur  $\mathbb{R}$ .

**11**  $e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \sqrt{x}$  ; **b)**  $e^{-2\ln x} = x^{-2}$  ;

**c)**  $\ln\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right) = 2x$  ; **d)**  $\ln(\sqrt{e^x}) = \frac{1}{2}x$ .

**13 a)**  $\frac{1}{e^{4x}} = e^{-4x}$  ; **b)**  $e^{2x} \times e^{-5x} = e^{-3x}$  ;

**c)**  $\frac{e^x}{e^{-2x}} = e^{3x}$  ; **d)**  $(e^{-2x})^4 = e^{-8x}$ .

**14 a)**  $\frac{e^{-5x}}{e^{-2x}} = e^{-3x}$  ;

**b)**  $e^{2x} \times e^{-5x} \times \frac{1}{e^x} = e^{-4x}$  ;

**c)**  $\frac{e^{3x}}{e^{\frac{1}{2}x}} = e^{\frac{5}{2}x}$  ; **d)**  $\left(e^{\frac{1}{6}x}\right)^4 = e^{\frac{2}{3}x}$ .

**16 a)**  $S = \{1; 2\}$  ; **b)**  $S = \{-2; 0\}$  ;

**c)**  $S = \left\{-\frac{\ln 3}{3}\right\}$ .

**18 a)** Les solutions sont  $-3$  et  $7$ .

**b)**  $S = \{\ln 7\}$ .

**19 a)** Les solutions sont  $-2$  et  $5$ .

**b)**  $S = \{\ln 5\}$ .

**20 a)**  $Q(X) = 3X^2 + 5X - 2$ .

**b)** Les solutions sont  $-2$  et  $\frac{1}{3}$ .

**c)**  $S = \{-\ln 3\}$ .

**21 a)** Il suffit de développer  $(x-2)(2x^2+x-6)$  pour obtenir l'égalité demandée. On a alors pour ensemble de solutions de la première équation :

$$S_a = \left\{2; -2; \frac{3}{2}\right\}.$$

**b)** Avec le changement de variable  $X = e^x$ , on obtient pour ensemble de solutions :

$$S_b = \left\{\ln 2; \ln \frac{3}{2}\right\}.$$

**c)** Avec le changement de variable  $X = \ln x$ , on obtient pour ensemble de solutions :

$$S_c = \left\{e^2; e^{-2}; e^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

**23 a)**  $f'(x) = (2x^2 + 5x + 1)e^x$ .

**b)**  $g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 2)^2}$ .

**24 a)**  $h'(x) = -\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ .

**b)**  $g'(x) = e^x \cos(2x) - 2e^x \sin(2x)$ .

**25 a)**  $h'(x) = -\frac{1}{2}e^x + 3x^2 - 1$ .

**b)**  $g'(t) = 2e^t - 8t$ .

**26 a)**  $g'(t) = \frac{e^t}{e^t + 2}$ .

**b)**  $f'(x) = 2e^x(e^x + 3)$ .

**c)**  $h'(x) = -\frac{3e^x}{(e^x + 2)^4}$ .

**27 a)**  $f'(x) = 3(e^x + 1)(e^x + x - 1)^2$ .

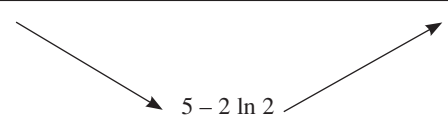
**b)**  $g'(u) = \frac{3e^u}{e^u + 5}$ . **c)**  $h'(t) = -\frac{10e^x}{(3 - e^x)^3}$ .

**29 a)**  $f'(x) = -5 - e^x$ , donc  $f'(x) < 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  (c'est la somme de deux nombres strictement négatifs). Par conséquent,  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**b)**  $f'(t) = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2}$ , donc  $f'(t) > 0$  pour tout  $t$

de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**c)**  $f'(x) = e^x - 2$ , d'où :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f$			

**30 a)**  $f(0) = -2$ ,  $f'(0) = -3$  et  $f(-1) = 0$ .

**b)**  $f'(x) = e^x(ax^2 + (b + 2a)x + c + b)$ , d'où, avec les trois conditions du **a)**,  $c = -2$ ,  $b = -1$  et  $a = 1$ .

**31 a)**  $f'(x) = -3 + e^x$ ,  $g'(x) = 1 + e^x$  et  $h'(x) = 3 - e^x$ .

**b)**  $g$  est représentée par la courbe bleue car sa dérivée est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ;  $f$  est représentée par la courbe verte car sa dérivée est strictement positive pour  $x > \ln 3$  et  $g$  par la rouge car sa dérivée est strictement négative pour  $x > \ln 3$ .

**32**  $f_1$  est représentée par la courbe bleue (courbe d'une fonction de référence),  $f_3$  par la courbe verte (image de la courbe bleue par la translation de vecteur  $2OJ$ ) et par élimination,  $f_2$  est représentée par la courbe rouge.

**33 1. A.**  ch5\_ex33.ggb

**b)** On conjecture que la distance  $NP$  est constante et égale à 1.

**2. a)**  $M(a; e^a)$  et  $P(a; 0)$ . La tangente  $T$  a pour coefficient directeur  $e^a$  et admet pour équation :  $y = e^a x - ae^a + e^a$ .

**b)** En résolvant l'équation  $e^a x - ae^a + e^a = 0$ , on obtient :  $N(a - 1; 0)$ .

**c)** On en déduit que

$$NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = 1.$$

**35 a)**  $S = \left] -\infty; -\frac{1}{2}e^{-3} \right]$ .

**b)**  $S = ]-\infty; 4 - e^3[$ . **c)**  $S = ]e^{10} - 1; +\infty[$ .

**37 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**38 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**39 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 625$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**41**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t + 5) = 5$  et

$\lim_{t \rightarrow -\infty} (-2e^t - 3) = -3$ , donc  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\frac{5}{3}$ .

$$f(t) = \frac{e^t(1 + 5e^{-t})}{e^t(-2 - 3e^{-t})} = \frac{1 + 5e^{-t}}{-2 - 3e^{-t}},$$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\frac{1}{2}$ .

**43 a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2e^t = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$  et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} 5t^2 - 1 = +\infty$ , on est donc en présence

d'une forme indéterminée du type « somme de deux fonctions, l'une tendant vers  $-\infty$  et l'autre vers  $+\infty$  ».

**b)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^t}{t^2} - \frac{1}{t} + 5 - \frac{1}{t^2} \right) = +\infty$

et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$

d'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (2e^t - t + 5t^2 - 1) = +\infty$ .

**44 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1) = -\infty$ , on est donc en présence

d'une forme indéterminée du type « somme de deux fonctions, l'une tendant vers  $-\infty$  et l'autre vers  $+\infty$  ».

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{x} - x - 1 \right) = +\infty$ .

**45 a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ; pour  $x \neq 0$ ,

on a :  $f(x) = x \left( -5 \frac{e^x}{x} + \frac{2}{x^3} + 1 \right)$ ,

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;

**b)**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$  et  $e^t > 0$ ,

donc  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$  ;  $f(t) = \frac{1}{t^2}$   
d'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

**48 a)**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$ . Pour  $t$  non nul,

$$f(t) = t \left( 4 \frac{e^t}{t} - 3 \right) \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ .

**b)**  $f'(t) = 4e^t - 3$ , donc  $f'(t) > 0$  si et seulement si  $t > \ln\left(\frac{3}{4}\right)$  et  $f'(t)$  s'annule en  $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ .

**c)**

$t$	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$0$	$+$
$f$	$+\infty$	$3 - 3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$+\infty$

**49 a)**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -5$ , donc la courbe représentative de  $x$  admet la droite d'équation  $y = -5$  pour asymptote en  $-\infty$ .

Pour tout réel  $t$ ,  $x(t) = \frac{1 - 5e^{-t}}{1 + e^{-t}}$ ,

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$  ; la courbe représentative de  $x$  admet la droite d'équation  $y = 1$  pour asymptote en  $+\infty$ .

**b)**  $x'(t) = \frac{6e^t}{(e^t + 1)^2}$ , donc pour tout  $t$ ,  $x'(t) > 0$ .

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$x'(t)$		$+$
$x$	$-5$	$1$

**51 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

**53 a)**  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 - t + 1) = +\infty$

donc  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$  ;  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 - t + 1) = +\infty$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  ;

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{2 - x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ .

**55** Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{1 - 2e^x}{3 + e^x}$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ .

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ .

**56 a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $f(\ln 2) = 1$ .

**b)** On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  donc  $b = 2$  ;

$f(\ln 2) = \frac{1}{2}a + b = 1$  d'où  $a = -2$ .

**57 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$  et  $f(\ln 3) = -2$ .

**b)** On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  donc  $b = -3$  ;

$f(\ln 3) = 9a + b = -2$  d'où  $a = \frac{1}{9}$ .

**59 a)**  $h'(t) = -e^{-t}$ .

**b)**  $f'(t) = -(\sin t)e^{\cos t}$ .

**60 a)**  $g'(x) = -2e^{2x} + 3e^{3x}$ .

**b)**  $h'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$ .

**61 a)**  $f'(x) = (1 - x)e^{-x+1}$ .

**b)**  $g'(t) = \frac{4e^{4t}}{(e^{3t} + e^t)^2}$ .

**62 a)**  $h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{x+1}{x}}$ .

**b)**  $g'(t) = \frac{-e^{-t}(t+2)}{t^3}$ .

**63 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ . La courbe  $C$  admet la droite d'équation  $x = -3$  pour asymptote en  $-\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^x) = -\infty$ .

On a donc une forme indéterminée.

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{2x}(1 - 2e^{-x} - 3e^{-2x})$   
donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**2. a)**  $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $2e^x > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $(e^x - 1)$ .

L'inéquation  $e^x - 1 > 0$  est équivalente à  $e^x > 1$ , soit  $x > 0$ . On en déduit que  $f'$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ , strictement négative sur  $]-\infty; 0[$  et nul en 0.

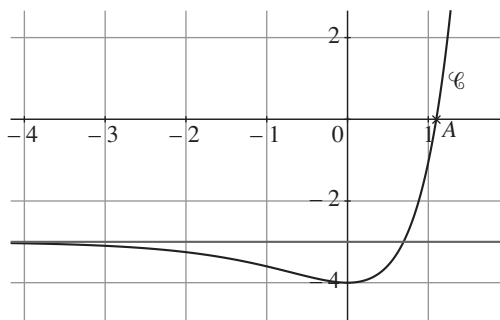
**b)**

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	-3		$+\infty$

**3.** On résout l'équation  $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ . En posant  $X = e^x$ , l'équation s'écrit  $X^2 - 2X - 3 = 0$  et admet deux solutions : -1 et 3. On a donc  $e^x = -1$  ou  $e^x = 3$ . La première équation n'a pas de solution et la deuxième une unique solution  $x = \ln 3$ .

La courbe  $C$  coupe donc l'axe des abscisses en un unique point  $A$  de coordonnées  $(\ln 3; 0)$ .

**4.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**64 a)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ . La courbe  $C$  admet la droite d'équation  $y = -1$  pour asymptote en  $-\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ . La courbe  $C$  admet la droite d'équation  $y = 3$  pour asymptote en  $+\infty$ .

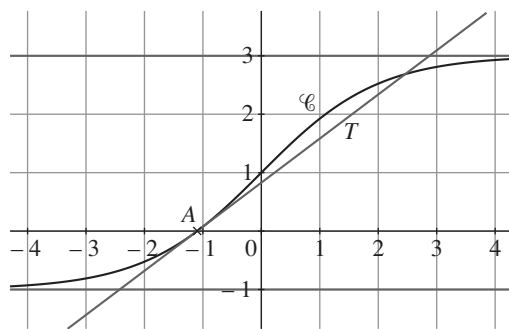
**c)**  $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$f'(x) > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f$	-1	3

**e)** L'équation  $f(x) = 0$  équivaut à  $3e^x - 1 = 0$ , soit  $e^x = \frac{1}{3}$ , ou encore  $x = -\ln 3$ . La courbe  $C$  a donc un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, le point  $A$  de coordonnées  $(-\ln 3; 0)$ . La tangente  $T$  a pour coefficient directeur  $f'(-\ln 3) = \frac{3}{4}$ .

**f)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**65 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$  et pour  $x > 0$ ,

$e^x - 1 > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} (-2e^x) = -2$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

La courbe  $C$  admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

**b)** Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{2}{1 - e^{-x}}$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 2$ .

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**c)**  $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$ ; il s'agit d'une somme

de termes strictement positifs pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , donc  $f'$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ .

**d)**

$x$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$

**2. a)**  ch5\_ex65.ggb

**b)** On conjecture que la distance  $MN$  tend vers 2 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**3.**  $MN = |f(x) - x| = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ .



On a vu au **1. b)** que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 2$ , ce qui démontre la conjecture faite à la question **2. b)**.

**67 1. a)**  $f(0) = 2$ .

**b)**  $S = ]-2 ; +\infty[$ .

**c)**  $f'(0) = -1$ .

**d)**  $S = [-1 ; +\infty[$ .

**e)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**2. a)**  $f(0) = (0 + 2)e^0 = 2$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , donc l'inéquation  $f(x) > 0$  équivaut à  $x + 2 > 0$ , d'où  $S = ]-2 ; +\infty[$ .

**c)**  $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ , donc  $f'(0) = -1$ .

**d)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , donc l'inéquation  $f'(x) \leq 0$  équivaut à  $-x - 1 \leq 0$ , d'où  $S = [-1 ; +\infty[$ .

**e)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{e^x} \left(1 + \frac{2}{x}\right)$ ; or

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**69 a)**  $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$ .

**b)**  $F(\theta) = -\frac{1}{2}e^{-2\theta-3} + c$ .

**c)**  $F(x) = 2e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 + x + c$ .

**70 a)**  $F(x) = e^{x^2+x} + c$ .

**b)**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ .

**c)**  $F(t) = -e^{\frac{1}{t}} + c$ .

**72 a)**  $F(x) = \frac{1}{8}(e^{2x} + 3)^4 + c$ .

**b)**  $H(t) = \frac{1}{2(1 + e^{-2t})} + c$ .

**73 a)**  $G(t) = \frac{1}{3} \ln(e^{3t} + 2) + c$ .

**b)**  $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + c$ .

**75 a)**  $F'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x$   
 $= (x^2 + 5x + 4)e^x = f(x)$

donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Les primitives de  $g$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto (x^2 + 3x + 1)e^x - \frac{7}{2}x^2 + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**c)** On a  $G(-1) = -e^{-1} - \frac{7}{2} + c = 2$ ,

d'où  $c = \frac{11}{2} + e^{-1}$

et  $G(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{11}{2} + e^{-1}$ .

**76**  $F'(x) = 3e^{2x} + (3x - 1) \times 2e^{2x}$   
 $= (6x + 1)e^{2x} = f(x)$

donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Les primitives de  $g$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto (3x - 1)e^{2x} - e^{-x} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**c)** On a  $G(0) = -2 + c = 1$ , d'où  $c = 3$  et  $G(x) = (3x - 1)e^{2x} - e^{-x} + 3$ .

## Problèmes

**80 1. a)**  $f(0) = 0$ ;  $f'(0) = 10$ ;  $f'(1) = 0$  et  $f'$  change de signe en 1.

**b)**  $f(0) = b = 0$  donc  $f(x) = axe^{cx}$ ;  $f'(x) = ae^{cx}(cx + 1)$  donc  $f'(0) = a = 10$ ; de plus  $f'(1) = 10e^{c(c-1)+1} = 0$ , soit  $c = -1$ . Conclusion:  $f(x) = 10xe^{-x}$ .

**2. a)**  $f(x) = 10\frac{x}{e^x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . L'axe des abscisses est donc asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**c)**  $f'(x) = 10e^{-x}(1 - x)$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$t$			

Le maximum de  $f$  est donc égal à  $10e^{-1}$ .

**81 A 1. a)**  $g'(x) = 4e^{2x} - 5e^x = e^x(4e^x - 5)$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $4e^x - 5$ .

L'inéquation  $4e^x - 5 > 0$  équivaut à  $e^x > \frac{5}{4}$ ,  
soit  $x > \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ . D'où :

$x$	0	$\ln\left(\frac{5}{4}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g$	-1	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$

avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(2 - \frac{5}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}}\right) = +\infty$ .

**2. a)** D'après le tableau de variation, l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution dans  $\left[0; \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]$  et une seule solution dans l'intervalle  $\left[\ln\left(\frac{5}{4}\right); +\infty\right]$ .

**b)**  $g(\ln 2) = 0$ .

**c)**  $\ln 2$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

**d)** À partir du tableau de variation et de la question **2. c)**, on déduit :

$x$	0	$\ln(2)$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

**B 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$  et pour  $x > 0$ ,  $e^x - 1 > 0$ . On en déduit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

La courbe  $C$  admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

$$\begin{aligned} \mathbf{2. a)} \quad 2 + 2x + \frac{1}{e^x - 1} &= 1 + 2x + \left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) \\ &= 1 + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = f(x). \end{aligned}$$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 2x) = +\infty$   
donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{3. a)} \quad f'(x) &= 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}. \end{aligned}$$

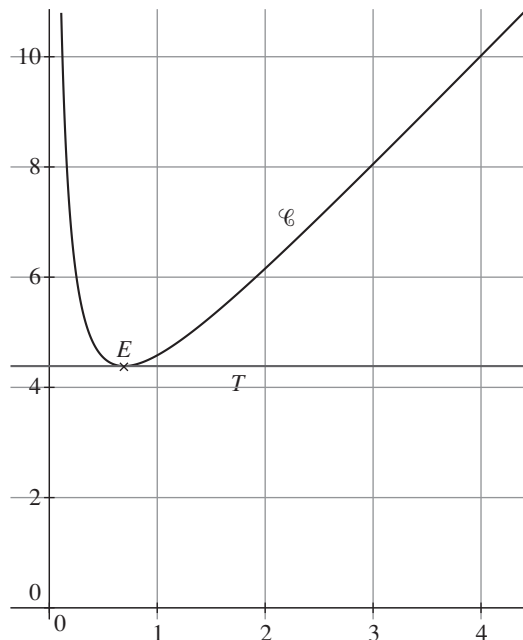
**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(e^x - 1)^2 \geq 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$ , signe étudié au **A 2. d)**.

$x$	0	$\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$3 + 2 \ln 2$	$+\infty$

**d)**  $E$  a pour ordonnée  $3 + 2 \ln 2$ .

**4.** La tangente à  $C$  en  $E$  est parallèle à l'axe des abscisses.

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**82 1. a) et c)** ch5\_pb82.ggb

**b)** Il semble que :

i. quel que soit  $k$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$ .

ii. si  $k \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = -\infty$  et si  $k > 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ .

iii. les courbes  $C_k$  n'aient aucun point commun.

**2. a)** Quelque soit  $k$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ke^x = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$ .

$$\mathbf{b)} \quad x^2 \left( k \frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = ke^x - x^2 = f_k(x).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ .

On en déduit, si  $k \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( k \frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = -\infty$   
donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = -\infty$  ;

si  $k > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( k \frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ .

**c)** L'équation est équivalente à  $(k - k')e^x = 0$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ , donc si  $k \neq k'$ , l'équation n'a pas de solution ce qui confirme que les courbes  $C_k$  n'ont aucun point commun.

**3.** On peut placer sur la courbe  $C_k$  le point d'intersection avec l'axe des ordonnées et la tangente en ce point. En observant l'équation réduite de cette tangente dans la fenêtre algèbre (demander l'équation sous la forme  $y = ax + b$ ), on peut faire la conjecture que le coefficient directeur de la tangente à  $C_k$  au point d'abscisse 0 est  $k$ , et cela pour tout réel  $k$ .

On calcule alors  $f'_k(x) = ke^x - 2x$ , d'où  $f'_k(0) = k$ , ce qui démontre la conjecture.

**83** Dans la TP1, on voit, à partir de contextes concrets, des exemples de fonctions de la forme  $x \mapsto a^x$ . L'objectif de ce problème est d'aborder les fonctions de la forme  $x \mapsto x^a$ , d'abord de façon théorique dans la partie A, puis avec un contexte concret dans la partie B.

**A 1. a)**  $e^{n \ln x} = e^{\ln x^n} = x^n$ .

**b)**  $x^a \cdot x^b = e^{a \ln x} \cdot e^{b \ln x} = e^{a \ln x + b \ln x}$   
 $= e^{(a+b) \ln x} = x^{a+b}$ .

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{e^{a \ln x}}{e^{b \ln x}} = e^{a \ln x - b \ln x} = e^{(a-b) \ln x} = x^{a-b}.$$

$$2. f'_a(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}.$$

**3.**  $F'_a(x) = \frac{1}{a+1} (a+1)x^a = x^a$ . Donc  $F_a$  est une primitive de  $f_a$ . Cette formule généralise celle des primitives des fonctions puissance, déjà connue pour les puissances entières.

**B 1.**  $(T^2)^{0,5} = T^{2 \cdot 0,5} = T$  et  $(ka^3)^{0,5} = k^{0,5} a^{1,5}$ , d'où  $T = k^{0,5} a^{1,5}$ .

**2. a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1,5 \ln x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1,5 \ln x) = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**c)**  $f'(x) = c \cdot 1,5 \cdot x^{0,5}$  d'après la formule établie à la **partie A**. Donc pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  ; la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	0	$+\infty$

D'après le tableau de variation, quelle que soit la valeur de  $T > 0$ , l'équation  $f(x) = T$  a une unique solution  $a$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

**d)**  $T = 6\,844$  s. À l'aide d'un tableau de valeurs de la fonction  $f$  on vérifie que  $f(7 \cdot 10^6) < 6844$  et  $f(8 \cdot 10^6) > 6\,844$ .

En prenant pour pas de la table de valeurs  $0,5 \cdot 10^6$  et pour première valeur  $7 \cdot 10^6$ , on vérifie que  $a > 7,5 \cdot 10^6$ , donc la valeur arrondie à 1 000 km près de  $a$  est 8 000 km.

**84 A 1.** Avec  $N = 4$ ,  $i = 1$ ,  $\text{res} = 1$  et  $\text{fac} = 1$ . La condition  $i \leq N$  est vérifiée, donc  $\text{fac} = 1$ ,  $\text{res} = 2$ ,  $i = 2$ .

La condition  $i \leq N$  est vérifiée, donc  $\text{fac} = 2$ ,  
 $\text{res} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  et  $i = 3$ .

La condition  $i \leq N$  est vérifiée, donc  $\text{fac} = 6$ ,  
 $\text{res} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$  et  $i = 4$ .


La condition  $i \leq N$  est vérifiée, donc  $\text{fac} = 24$ ,  
 $\text{res} = \frac{8}{3} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$  et  $i = 5$ .

La condition  $i \leq N$  n'est pas vérifiée, donc l'algorithme affiche  $\text{res} = \frac{65}{24} \approx 2,708\,333$ .

**2. a) et b)**  ch5\_pb84a.alg

Pour  $N = 10$  on obtient  $\text{res} = 2,718\,281\,8$  et pour  $N = 100$  on obtient  $\text{res} = 2,718\,281\,8$ .

Le nombre  $\text{res}$  semble tendre vers un nombre dont la valeur arrondie à  $10^{-6}$  est 2,718 282. On peut faire la conjecture que ce nombre est le nombre  $e$ .

**c)**  ch5\_pb84b.alg.

Pour  $N = 10$  on a  $e\text{-res} = 2,73 \cdot 10^{-8}$  et pour  $N = 100$  on a  $e\text{-res} = -9,55 \cdot 10^{-13}$ . Ces résultats semblent conforter la conjecture faite à la question précédente.

**B 1.**  $E_1 = 2 - e \approx -0,718$  ;

$$E_2 = \frac{5}{2} - e \approx -0,218 ; E_3 = \frac{8}{3} - e \approx -0,052 .$$

**2.**  ch5\_pb84c.alg. On obtient  $N = 14$ .

On peut profiter de ce problème pour parler de  $n$  ! si cela n'a pas été déjà abordé dans un autre chapitre. On peut faire écrire les premiers termes de la suite étudiée dans le problème sous

forme d'une somme de termes utilisant les factoriels des premiers entiers et aboutir à l'écriture  $u_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ . On pourra conclure le problème en indiquant aux élèves que cette suite converge vers e.

**85 1.**  $t = 15000 e^{-1,4\pi} \approx 184,5 \text{ N}$ .

**2. a)**  $t = T e^{-\alpha f}$ , soit ici  $t = 15000 e^{-4\pi f}$ . On a  $h'(f) = -60\,000 \pi e^{-4\pi f}$ . Pour tout réel  $f$ ,  $e^{-4\pi f} > 0$ , donc  $h'(f) < 0$ . La fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $[0,05; 1]$ .

Si  $f$  diminue,  $h(f)$  augmente, donc la tension  $t$  que doit exercer l'équipier augmente.

Si  $f = 0,23$  et  $n = 2$ , l'équipier doit exercer une tension de  $h(0,23) \approx 833,4 \text{ N}$ .

**b)**  $n = \frac{1}{2\pi f} \ln\left(\frac{T}{t}\right)$ . Pour  $f = 0,23$ ,  $T = 15\,000$  et  $t = 184,5$ , on obtient  $n = \frac{1}{0,46\pi} \ln\left(\frac{15000}{184,5}\right) \approx 3$ .

**86 1. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = E$ . La courbe  $\Gamma$  admet la droite  $D$  d'équation  $y = E$  pour asymptote en  $+\infty$ .

**b)**  $u'_C(t) = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Pour tout  $t$  de  $[0; +\infty[$ ,  $u'_C(t) > 0$ , donc la fonction  $u_C$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

**c)**  $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63E$  ;

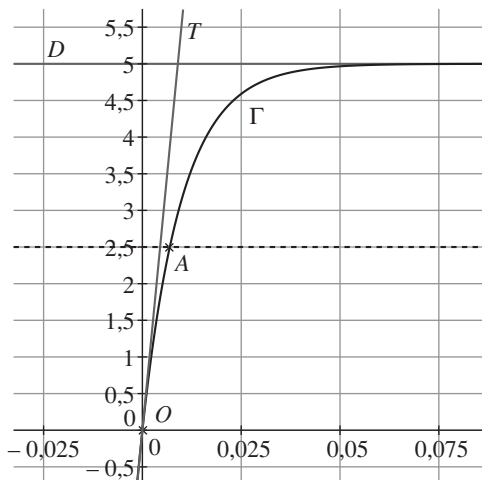
$u_C(2\tau) = E(1 - e^{-2}) \approx 0,86E$  ;

$u_C(3\tau) = E(1 - e^{-3}) \approx 0,95E$ .

**d)** Le coefficient directeur de  $T$  est  $u'_C(0) = \frac{E}{\tau}$ .

**2. a)**  $u_C(t) = 5(1 - e^{-100t})$ .

**b)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**c)** Par lecture graphique (point A sur la représentation ci-dessus), on obtient  $t_0 \approx 0,01$ .

**d)** On résout  $5(1 - e^{-100t}) = 2,5$ , on obtient  $t_0 = \frac{\ln 2}{100} \approx 0,007$ . Le microprocesseur se met en fonctionnement environ 7 ms après la mise sous tension.

**87 A 1.**  $N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T}{\tau}}$ . On obtient  $\tau = \frac{T}{\ln 2}$  et  $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{T} \ln 2}$ . On peut retrouver la relation donnée dans le TP1 :  $N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$ .

**2. a)** La période du césium 37 étant de 30 ans, le nombre de noyaux radioactifs sera divisé par 2, il restera donc  $2,75 \times 10^{14}$  noyaux. Après 120 ans, soit 4 périodes, le nombre de noyaux est divisé par  $2^4$ , il reste  $3,4375 \times 10^{13}$  noyaux radioactifs. On peut bien sûr obtenir ces mêmes résultats en utilisant la formule établie au 1.

**b)** On résout  $N_0 e^{-\frac{t}{30} \ln 2} = \frac{N_0}{1000}$  et on obtient  $T_{1000} = 30 \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 299$ .

**c)** En 10 périodes de 30 ans, soit 300 ans, la quantité de césium 37 est divisée par  $2^{10}$ , soit environ par 1000. On trouve donc qu'il faut environ 300 ans pour diviser le nombre de noyaux par 1000, résultat proche du précédent.

**B 1.**  $\frac{C_0}{C(t)} = \frac{\frac{N_0}{N_{\text{Total}}}}{\frac{N(t)}{N_{\text{Total}}}} = \frac{N_0}{N(t)}$ .

On a donc :  $\frac{C_0}{C(t)} = \frac{N_0}{N(t)} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} = e^{\frac{t}{\tau}}$ .

**2. a)** À partir de la relation ci-dessus, on obtient :

$t = \tau \ln\left(\frac{C_0}{C(t)}\right)$ .

**b)**  $t = 8265 \ln\left(\frac{10^{-12}}{9 \times 10^{-13}}\right) = 8265 \ln\left(\frac{10}{9}\right) \approx 870,8$ .

L'échantillon a environ 871 ans.

**3.** On résout  $N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} < 0,15 N_0$  et on obtient  $t > -\tau \ln(0,15)$ . Suivant l'affirmation de ces experts, on ne peut donc pas dater au carbone 14 un échantillon de plus de  $-8265 \ln(0,15) \approx 15\,680$  ans.

**88 1. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

**b)**  $f'(t) = -40e^{-0,4t}$ . Pour tout  $t$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(t)$  est strictement négatif, donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

**2.**  $f(8) = 100e^{-3,2} \approx 4,08$ . Il reste environ 4 % du produit, donc environ 96 % a été éliminé.

**3.** Après cette deuxième injection, il y a environ 104 mg de médicament dans l'organisme.

**4. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ .

**b)**  $g'(t) = -40e^{-0,4t}(2 + e^{3,2})$ . Pour tout  $t$  de  $[8 ; +\infty[$ ,  $g'(t)$  est strictement négatif, donc  $g$  est strictement décroissante sur  $[8 ; +\infty[$ .

**5. a)** L'équation  $f(t) = 20$  a pour solution

$$t = -\frac{1}{0,4} \ln(0,2) = 2,5 \ln 5,$$

soit 4,02 heures au centième d'heure près. L'équation  $g(t) = 20$  a pour solution

$$t = -\frac{1}{0,4} \ln\left(\frac{0,2}{2 + e^{3,2}}\right), \text{ soit } 12,22 \text{ heures au centième d'heure près.}$$

**b)** Le médicament cesse d'être efficace 4,02 heures après la première injection, puis 12,22 heures après la deuxième injection. Il est efficace sur les intervalles de temps  $[0 ; 4,02]$  puis sur  $[8 ; 12,22]$ .

## Vers le Bac

**89 1. B. 2. A. 3. C. 4. C. 5. C.**

**90 A 1. a)**  $A(-3 ; 0)$  et  $B(0 ; 3)$ . On a donc  $f(-3) = 0$  et  $f(0) = 3$ .

**b)** La droite  $D$  a pour coefficient directeur  $\frac{3-0}{0-(-3)} = 1$  et pour ordonnée à l'origine l'ordonnée de  $B$ , d'où l'équation proposée. On en déduit que  $f'(0) = 1$ .

**2. a)**  $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$   
 $= (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$ .

**b)**  $f'(0) = b - c$ .

**3. a)** On a  $f(-3) = (9a - 3b + c)e^{-3} = 0$ , d'où la première équation du système.

On a  $f(0) = c = 3$ , d'où la troisième équation du système.

On a  $f'(0) = b - c = 1$ , d'où la troisième équation du système.

**b)** On obtient :  $a = 1$ ,  $b = 4$  et  $c = 3$ , soit  $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ .

**B 1. a)** Pour tout  $x$  non nul,

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) e^{-x}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)**  $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ .

**c)** Voir **a)**. Avec le résultat du **b)** et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1,$$

on conclut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

La courbe  $C_f$  admet l'axe des abscisses pour asymptote en  $+\infty$ .

**2. a)** À partir du résultat du **A. 2. a)**, on obtient  $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $(-x^2 - 2x + 1)$ , polynôme de degré 2 qui s'annule en  $-1 - \sqrt{2}$  et  $-1 + \sqrt{2}$ . On en déduit que  $f'$  est positive sur  $[-1 - \sqrt{2} ; -1 + \sqrt{2}]$  et négative en dehors de cet intervalle.

$x$	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f$	$+\infty$	$f(-1-\sqrt{2}) \approx -9,3$	$f(-1+\sqrt{2}) \approx 3,2$	0	

**b)** On a  $f(-1) = 0$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $[-1 ; -1 + \sqrt{2}]$  et  $f(-1 + \sqrt{2}) > 2$ , donc l'équation  $f(x) = 2$  a une seule solution dans l'intervalle  $[-1 ; -1 + \sqrt{2}]$ .

D'autre part,  $f(3) < 2$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $[-1 + \sqrt{2} ; 3]$ , donc l'équation  $f(x) = 2$  a une seule solution dans l'intervalle  $[-1 + \sqrt{2} ; 3]$ . L'équation proposée a donc exactement deux solutions dans l'intervalle  $[-1 ; 3]$ .

Par approximations successives à la calculatrice, on obtient comme valeur approchée à  $10^{-2}$  près des solutions :  $-0,52$  et  $2,03$ .

**91 1. a)**  $f(0) = 1$ . En 2010, la population est de 100 individus.

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} &= \frac{3(e^{0,5t} + 2) - 6}{e^{0,5t} + 2} \\ &= \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2} = f(t). \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{0,5t} + 2) = +\infty, \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^{0,5t} + 2} = 0$$

d'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 3$ .

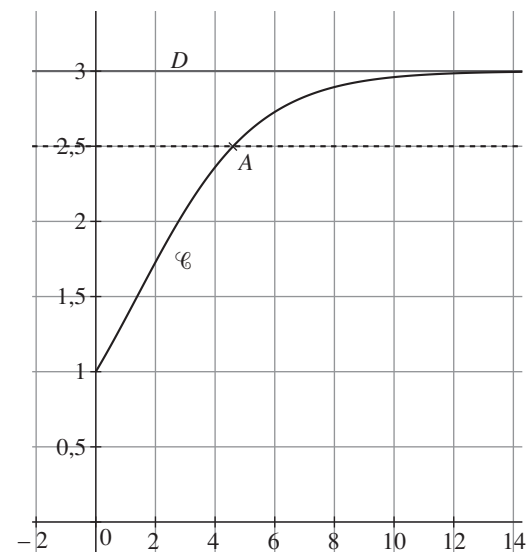
Après un temps « suffisamment long », la population se stabilise à 300 individus.

$$\text{2. a) } f'(t) = \frac{3e^{-0,5t}}{(e^{0,5t} + 2)^2}.$$

b) Pour tout  $t$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(t)$  est strictement positif donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

$t$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f$	1	3

3. La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



4. Par lecture graphique, on peut chercher le point A d'ordonnée 2,5 sur la courbe et on obtient une abscisse d'environ 4,5. On peut donc dire que la population dépassera 250 individus dans le courant de l'année 2014. On peut aussi résoudre l'inéquation  $f(t) > 2,5$ , et on obtient  $t > 2 \ln(10)$ . La conclusion est la même que précédemment.

On peut aussi résoudre l'équation  $f(t) = 2,5$  et argumenter sur le sens de variation de  $f$  pour aboutir à la même conclusion.

$$\text{92 1. a) } x \left( \frac{e^x}{x} - k \right) = e^x - kx = f_k(x).$$

b) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc, quelle que soit la valeur de  $k$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ .

2. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $k$  étant strictement positif,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$ .

3. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f'_k(x) = e^x - k$ . On a alors  $f'_k(x) > 0$  si et seulement si  $e^x > k$ , soit  $x > \ln k$ .

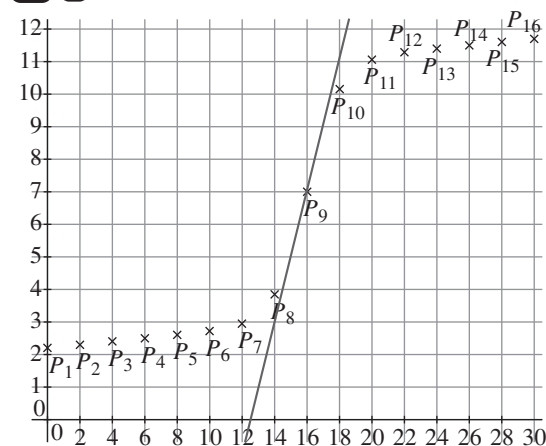
La dérivée est strictement positive sur  $]\ln k ; +\infty[$ , nulle en  $\ln k$  et strictement négative sur  $]-\infty ; \ln k[$ ; la fonction est donc strictement croissante sur  $]\ln k ; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]-\infty ; \ln k[$ . Enfin, on a :  $f_k(\ln k) = k - k \ln k = k(1 - \ln k)$ .

4. a) On peut conjecturer que le point  $A(0 ; 1)$  appartient à toutes les courbes  $C_k$ .

b) Pour toute valeur de  $k$ ,  $f_k(0) = 1$ , donc le point A appartient bien à toutes les courbes  $C_k$ .

c) Le minimum de la fonction  $f_k$  cherchée est atteint pour  $x$  environ égal à 1,6 donc on a  $\ln k \approx 1,6$ , soit  $k \approx e^{1,6}$ , ou encore  $k \approx 5$ .

### 93 A 1.



2. Le pH est 7 pour 16 mL versés.

3. Le pH initial est 2,2.

4. Voir graphique.

5. a) Pour cette partie, on pourrait proposer une fonction affine car les points  $P_1$  à  $P_7$  semblent « presque » alignés.

**b)** On peut choisir de faire passer la droite par les points  $P_1$  et  $P_7$ , ce qui donnerait pour équation de la droite  $y = 0,06x + 2,2$  (mais il y a d'autres choix possibles). La fonction  $g$  donnant alors le pH en fonction du volume est définie par  $g(v) = 0,06v + 2,2$ .

**B 1.**  $f(16) = 0,05 \times 16 + 10,2 - \frac{8}{2} = 7.$

**2.**  $f'(x) = 0,05 + \frac{8e^{x-16}}{(1 + e^{x-16})^2}.$

**3.** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $8e^{x-16} > 0$  et  $(1 + e^{x-16})^2 > 0$ . On a donc le quotient et la somme de nombres strictement positifs, donc, pour tout  $x$  de  $[0 ; 30]$ ,  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0 ; 30]$ .

**4. a)**  $f'(14) = 0,05 + \frac{8e^{-2}}{(1 + e^{-2})^2}$  et

$f'(18) = 0,05 + \frac{8e^2}{(1 + e^2)^2}.$  On a :

$$\frac{8e^2}{(1 + e^2)^2} = \frac{8e^2}{(e^{-2}(e^{-2} + 1))^2} = \frac{8e^2}{e^{-4}(1 + e^{-2})^2} = \frac{8e^{-2}}{(1 + e^{-2})^2}, \text{ donc } f'(18) = f'(14). \text{ Les deux}$$

tangentes ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

**b)** On a  $f(14) = 3,85$  à  $10^{-2}$  près et  $f(18) = 10,15$  à  $10^{-2}$  près. Le milieu du segment  $[AB]$  a alors pour abscisse  $\frac{14 + 18}{2} = 16$  et pour ordonnée  $\frac{3,85 + 10,15}{2} = 7$ . Le milieu de  $[AB]$  est le point  $E$ .

## Activités

Dans la première partie de cette activité, on calcule des aires de parties de plan délimitées par des fonctions affines et on constate le lien entre aire et primitive. Dans la deuxième partie, on utilise la commande « Intégrale » du logiciel GeoGebra pour représenter des domaines limités par une courbe de fonction à valeurs positives, l'axe des abscisses et deux droites verticales. On constate grâce aux aires de ces domaines affichées par le logiciel ce même lien entre calcul d'aire et primitive.

## Activité 1 Donner de l'air(e) aux primitives

**A 1 a)** Si  $a = 2$ , alors l'aire  $A = 0$ .

**b)**

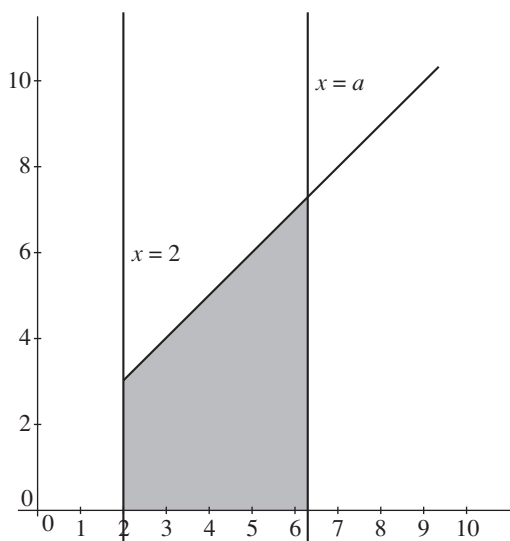
$a$	2	3	5	7	9	10
$A$	0	5	15	25	35	40

**2 a)**  $A(a) = 5 \times (a - 2)$ .

**b)** Pour tout  $a$  de  $[2 ; 10]$ ,  $A'(a) = 5 = f(a)$  ; la fonction  $f$  est la dérivée de la fonction  $A$ .

**c)** «  $A$  est la primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en 2. »

**3** Si  $a = 2$  alors l'aire  $A = 0$ .





$a$	2	3	5	7	9	10
$A$	0	3,5	13,5	27,5	45,5	56

Pour tout  $a$  de  $[2 ; 10]$ ,  $A(a) = \frac{(a-2)(a+4)}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + 2a - 8)$  et  $A'(a) = a + 1 = f(a)$ .

«  $A$  est la primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en 2. »

**B** 1 a)  ch6\_act1.ggb

**b)**  $F(x) = 0,1x^3 - 0,8x^2 + 6,2x - 10$

**c)** Il semble que, pour toutes les valeurs  $a$  du curseur, prises dans  $[2 ; 10]$ , on ait  $A(a) = F(a)$ .

**d)** Le point  $M$  se déplace sur la courbe représentative de la fonction  $F$ , ce qui confirme la conjecture faite au **c)**.

**e)** La remarque faite à la **partie A** semble encore valable pour la fonction  $f$  de la **partie B**.

**f)** «  $A$  semble être la primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en 2 ».

**2** On arrive à la même conjecture, pour la fonction proposée ici, puis pour toute autre fonction à valeurs positives choisie.

## Activité 2 Des aires et des moyennes

L'objectif de cette activité est de calculer des moyennes de fonctions dans un contexte où ces moyennes ont déjà un sens : la vitesse moyenne d'un véhicule, et dans le même ordre d'idée, l'accélération moyenne, sur un intervalle de temps. On « active » ainsi l'idée de moyenne des valeurs d'une fonction sur un intervalle. Sur le premier exemple, on fait observer aux élèves que cette moyenne est la hauteur d'un rectangle dont l'aire est égale à l'aire délimitée par la courbe et l'axe des abscisses. Sur le deuxième exemple, on fait construire la courbe de la fonction et le rectangle dont la hauteur est la valeur moyenne.

**A** 1 Voir graphique complet à la question 3.

**2 a)** Les primitives de  $v$  sur  $[0 ; 7]$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto t^2 + c$ .

Avec  $d(0) = 0$ , on a  $c = 0$  et  $d(t) = t^2$  ;  $\lim_{\substack{t \rightarrow 7 \\ t < 7}} d(t) = 49$ .

**b)** Les primitives de  $v$  sur  $[7 ; 37,5]$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto 14t + c$ .

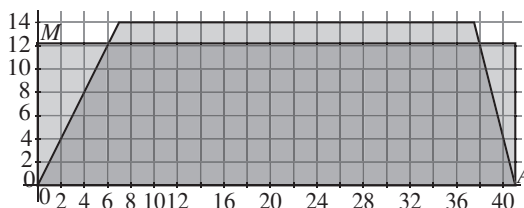
On a  $d(7) = 49$  donc  $c = -49$  et  $d(t) = 14t - 49$  ;  $\lim_{\substack{t \rightarrow 37,5 \\ t < 37,5}} d(t) = 476$ .

**c)** Les primitives de  $v$  sur  $[37,5 ; 41]$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto -2t^2 + 164t + c$ .

On a  $d(37,5) = 476$  donc  $c = -2861,5$  et  $d(t) = -2t^2 + 164t - 2861,5$ . On en déduit que  $d(41) = 500,5$ .

**3 a)**  $v_m = \frac{500,5}{41} \approx 12,21 \text{ m.s}^{-1}$ .

**b)**



L'aire du rectangle est  $A_1 = 41 \cdot v_m = 500,5$ .

**c)** L'aire de la partie de plan limitée par l'axe des abscisses et la courbe de  $v$  est

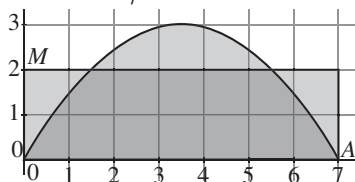
$$A_2 = \frac{7 \cdot 14}{2} + 30,5 \cdot 14 + \frac{3,5 \cdot 14}{2} = 500,5.$$

On remarque que l'aire de la partie de plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses est égale à l'aire du rectangle.

**B a)** Pour tout  $t$  de  $[0 ; 7]$   $a(t) = v'(t) = -\frac{12}{49}(t^2 - 7t)$ .

**b)** Voir graphique complet à la question **d)**.

**c)**  $a_m = \frac{14 - 0}{7} = 2$



L'aire du rectangle est 14.

*Remarque : si cette activité est traitée après avoir vu la partie du chapitre concernant les calculs d'aires, on peut faire faire le calcul de l'aire de la partie en rose. Si elle est traitée en début de chapitre, on peut utiliser un logiciel de calcul formel ou la commande « Intégrale » de GeoGébra pour faire constater aux élèves l'égalité des aires.*

## Travaux Pratiques

### TP 1 Ça a l'air d'une aire

**A 1** On n'a pas dans le cours les primitives de la fonction  $\ln$ .

**2 a)** Les ordonnées de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont respectivement  $5 \ln 2$ ,  $5 \ln 4$ ,  $5 \ln 6$  et  $5 \ln 8$ .

Les quatre rectangles ont comme aires respectives  $10 \ln 2$ ,  $10 \ln 4$ ,  $10 \ln 6$  et  $10 \ln 8$ .

**b)** La somme de ces aires est  $10(\ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + \ln 8) = 10 \ln 384$ . Une valeur approchée de l'aire  $A$  est 59,5 unités d'aire. Il s'agit d'une valeur approchée par défaut.

**B 1 a)** Dans la **partie A**,  $n = 4$  et  $pas = 2$ .

**b)** On divise un segment de longueur 8 en  $n$  segments de même longueur donc  $pas = \frac{8}{n}$ .

**2 a)** Dans la **partie A** on a  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 6$ ,  $x_4 = 8$  et  $x_5 = 10$ .

**b)** On a  $x_1 = 2$  et  $x_{n+1} = 10$ .

**c)** Pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ ,  $x_{i+1} - x_i = \frac{8}{n}$ .

**3**

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  pas EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  A app EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  A_app PREND_LA_VALEUR 0
  pas PREND_LA_VALEUR 8/n
  x PREND_LA_VALEUR 2
  POUR i ALLANT_DE 1 À n
    DÉBUT_POUR
      A_app PREND_LA_VALEUR A_app + pas*F1(x)
      x PREND_LA_VALEUR x + pas
    FIN_POUR
  AFFICHER A_app
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée : F1(x) = 5*ln(x)
```

#### 4 ch6\_tp1.alg

Pour  $n = 100$  on obtient  $A_{\text{app}} = 67,874829$ , pour  $n = 1\,000$ ,  $A_{\text{app}} = 68,165583$ , et pour  $n = 10\,000$ ,  $A_{\text{app}} = 68,194564$ .

**C 1** Pour tout  $x$  de  $[2 ; 10]$ ,  $g'(x) = 5 \left( 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \right) = 5 \ln x$ . Donc  $g$  est bien une primitive de  $f$ .

$$\text{2 } A = \int_2^{10} f(x) dx = [g(x)]_2^{10} = 50 \ln 10 - 50 - 10 \ln 2 + 10 = 50 \ln 10 - 10 \ln 2 - 40.$$

**3**  $50 \ln 10 - 10 \ln 2 - 40 \approx 68,197783$  (arrondi à  $10^{-6}$  près). Avec  $n = 10\,000$ , on a une valeur approchée avec une erreur de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3}$ .

*Prolongement possible : on peut faire le même travail avec une autre fonction (par exemple la fonction  $x \mapsto e^{x^2}$ , en disant aux élèves qu'on ne dispose d'aucune expression des primitives de cette fonction). On peut également leur faire modifier l'algorithme pour obtenir les valeurs approchées supérieures en utilisant les rectangles de base  $(x_{i+1} - x_i)$  et de hauteur  $f(x_{i+1})$ .*

## TP 2 L'électricité à ses débuts

Ce TP est l'occasion de calculer, dans un contexte d'électricité et d'histoire des sciences et techniques, des valeurs moyennes. On y explique les résultats d'une expérience historique et on y découvre la notion de valeur efficace et le sens de cette grandeur en électricité : la valeur efficace d'une tension alternative est la valeur de la tension continue qui fournit la même puissance.

$$\text{1 a) } \bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V \sin(\omega t) dt = \frac{V}{T} \left[ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^T = \frac{V}{\omega T} (1 - \cos(\omega T)).$$

$$\text{b) } \bar{V} = \frac{V}{2\pi} (1 - \cos(2\pi)) = 0.$$

**c)** La valeur moyenne de la tension est nulle, donc cela explique que les voltmètres de l'époque indiquent une valeur nulle.

$$\text{2 a) } p(t) = \frac{V^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

$$\text{b) } P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2}{R} \sin^2(\omega t) dt.$$

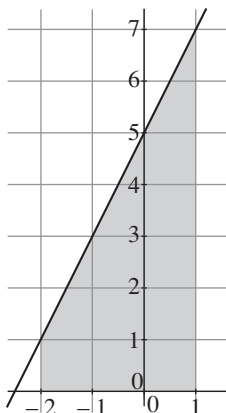
$$\text{c) } P = \frac{V^2}{TR} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \frac{V^2}{2TR} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{V^2}{2R}.$$

**d)** Puisque la puissance absorbée est non nulle, cela explique que la lampe s'éclaire.

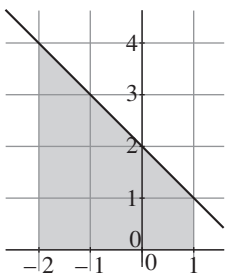
$$\text{3 Si } P = P_1, \text{ on a } \frac{E^2}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2}{R} \sin^2(\omega t) dt, \text{ soit } E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt.$$

# Exercices

**2 a)** La partie de plan limitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -2$  et  $x = 1$  est un trapèze de hauteur 3, de grande base 7 et de petite base 1, donc  $\int_{-2}^1 f(x) dx = 12$ .



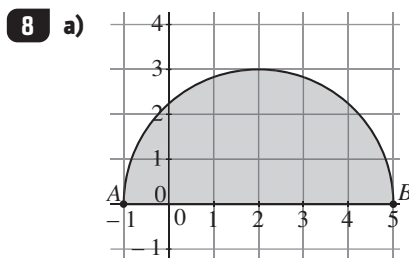
**b)** La partie de plan limitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -2$  et  $x = 1$  est un trapèze de hauteur 3, de grande base 4 et de petite base 1, donc  $\int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{15}{2}$ .



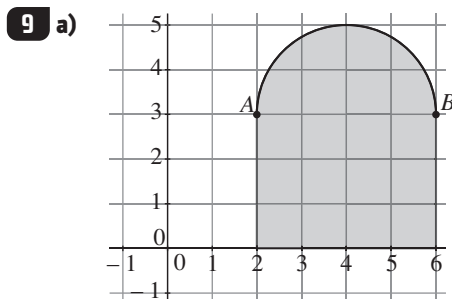
**3**  $\int_{-3}^5 f(x) dx = 4 \times \frac{8+3}{2} = 22$ .

**5** L'intégrale  $\int_1^5 \frac{dx}{x+1}$  est la mesure de l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe  $C$  représentative de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 5$ .

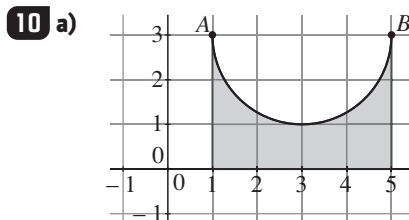
**7** L'aire, en unités d'aire, de la partie colorée est  $\int_0^1 f(x) dx$ .



**b)** Il s'agit de l'aire d'un demi-disque de rayon 3, soit  $\int_{-1}^5 f(x) dx = \frac{9}{2} \pi$ .



**b)** Il s'agit de la somme des aires d'un demi-disque de rayon 2 et d'un rectangle, soit  $\int_2^6 f(x) dx = 2\pi + 12$ .



**b)** Il s'agit de la différence entre l'aire d'un rectangle et celle d'un demi-disque de rayon 2, soit  $\int_1^5 f(x) dx = 12 - 2\pi$ .

**11 a)** La partie de plan considérée contient le rectangle de largeur 4 et de hauteur 2 et est incluse dans le rectangle de largeur 4 et de hauteur 6 ; on peut donc écrire :  $8 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 24$ .

**b)** En utilisant un rectangle de hauteur 2 et de largeur 1 et le trapèze dont un côté est  $[BC]$  et l'autre sur l'axe des abscisses, on a  $2 + \frac{2+6}{2} \times 3 \leq \int_0^4 f(x) dx$  ; avec le trapèze dont

un côté est  $[AD]$  et l'autre porté par l'axe des abscisses, et un rectangle de hauteur 6 et de largeur 1, on a :  $\int_0^4 f(x) dx \leq \frac{2+6}{2} \times 3 + 6$ . D'où

$$\text{l'encadrement } 14 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 18.$$

**13 a)**

$$\int_4^5 (3x^2 + 5x - 2) dx = \left[ x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x \right]_4^5 = \frac{163}{2}.$$

$$\text{b) } \int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = [\ln(x-3)]_4^5 = \ln 2.$$

**14 a)**

$$\int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + x \right]_{-3}^{-1} = 16.$$

**b)**

$$\int_{-1}^2 (x^3 + x^2 + x + 1) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 = \frac{45}{4}.$$

$$\text{15 a) } \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^4 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } \int_1^2 x^n dx = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_1^2 = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

**16 a)**

$$\int_{-\pi}^0 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) dx = \left[ -\frac{1}{3} \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{-\pi}^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{b) } \int_{-1}^4 \frac{dt}{t+2} = [\ln(t+2)]_{-1}^4 = \ln 6.$$

$$\text{17 a) } \int_0^2 (x^4 + x^2) dx = \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{136}{15}.$$

$$\text{b) } \int_{-2}^{-1} \left( \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) dx = \left[ -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{17}{8}.$$

$$\text{18 a) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x) dx = \left[ -\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{b) } \int_{-3}^0 e^x dx = [e^x]_{-3}^0 = 1 - e^{-3}.$$

$$\text{20 a) } \int_0^2 (1 + \sin \pi t) dt = \left[ t - \frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^2 = 2.$$

$$\text{b) } \int_0^1 (2\theta - \cos(\pi \theta)) d\theta = \left[ \theta^2 - \frac{1}{\pi} \sin(\pi \theta) \right]_0^1 = 1.$$

$$\text{22 a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \sin t dt = \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } \int_e^4 \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^4 = \frac{(\ln 4)^2 - 1}{2}.$$

$$\text{23 a) } \int_0^1 e^{3x} (e^{3x} - 1)^3 dx = \left[ \frac{(e^{3x} - 1)^4}{12} \right]_0^1 = \frac{(e^3 - 1)^4}{12}.$$

$$\text{b) } \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin t \cos^2 t dt = \left[ -\frac{\cos^3 t}{3} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^0 = \frac{3\sqrt{3} - 8}{24}.$$

$$\text{25 a) } \int_0^2 \frac{1}{(4x+1)^2} dx = \left[ -\frac{1}{4(4x+1)} \right]_0^2 = \frac{2}{9}.$$

$$\text{b) } \int_{-1}^0 \left( x^2 - 1 - \frac{1}{(x-1)^4} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3(x-1)^3} \right]_{-1}^0 = -\frac{23}{24}.$$

**26 a)**

$$\int_1^2 \left( 2 + \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx = \left[ 2x - \frac{1}{2(2x+1)} \right]_1^2 = \frac{31}{15}.$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[ \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1.$$

**28 a)**

$$\int_1^2 \left( x + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ln x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{13}{3} + \ln 2.$$

**b)**

$$\int_1^2 \frac{x^2 - x + 3}{x} dx = \int_1^2 \left( x - 1 + \frac{3}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln x \right]_1^2 = \frac{1}{2} + 3 \ln 2.$$

$$\text{29 a) } \int_0^2 \frac{3}{3x+2} dx = [\ln(3x+2)]_0^2 = \ln 4.$$

$$\text{b) } \int_{-2}^{-1} \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_{-2}^{-1} = \ln\left(\frac{2}{5}\right).$$

$$\text{30 a) } \int_0^1 \frac{dx}{2x+3} = \left[ \frac{1}{2} \ln(2x+3) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

$$\text{b) } \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-x^3} dx = \left[ -\frac{1}{3} \ln(1-x^3) \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} \ln 2.$$

$$\textbf{31 a)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

$$\textbf{b)} \int_1^2 \left( t + 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + t + \ln(t+1) \right]_1^2 = \frac{5}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

$$\textbf{32 a)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[ e^{-\frac{1}{t}} \right]_{-2}^{-1} = e - e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\textbf{b)} \int_{-1}^0 x e^{x^2+1} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} (e - e^2).$$

$$\textbf{33 a)} \int_{-2}^0 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = [\ln(e^{2x}+1)]_{-2}^0 = \ln\left(\frac{2}{e^{-4}+1}\right).$$

$$\textbf{b)} \int_0^2 \frac{e^x + 2e^{2x}}{e^x + e^{2x}} dx = [\ln(e^x + e^{2x})]_0^2 = \ln\left(\frac{e^2 + e^4}{2}\right).$$

**35** Pour avoir

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1},$$

$$= \frac{5x^2 + 7x - 2}{x+1}$$

pour tout  $x$  différent de  $-1$ , il suffit d'avoir,  $a = 5$ ,  $a + b = 7$  et  $b + c = -2$ , soit  $a = 5$ ,  $b = 2$  et  $c = -4$ . On a donc

$$\frac{5x^2 + 7x - 2}{x+1} = 5x + 2 - \frac{4}{x+1}.$$

$$\textbf{b)} \int_0^2 \frac{5x^2 + 7x - 2}{x+1} dx = \int_0^2 \left( 5x + 2 - \frac{4}{x+1} \right) dx = \left[ 5\frac{x^2}{2} + 2x - 4\ln(x+1) \right]_0^2 = 14 - 4\ln 3.$$

**36 a)** Pour tout  $x$  différent de  $1$  et  $3$ ,

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{3(x-3) + 2(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{5x-11}{x^2-4x+3}.$$

$$\textbf{b)} \int_4^5 \frac{5x-11}{x^2-4x+3} dx = [3\ln(x-1) + 2\ln(x-3)]_4^5 = 8\ln 2 - 3\ln 3$$

**38 a)** La fonction  $F$  est une primitive de  $f$  si et seulement si  $F' = f$ . On a :

$$F'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}.$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $F'(x) = f(x)$  en prenant  $-a = 1$  et  $a-b = 5$ , soit  $a = -1$  et  $b = -6$ . La fonction  $F$  définie par  $F(x) = (-x-6)e^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\textbf{b)} \int_{-1}^0 (x+5)e^{-x} dx = [(-x-6)e^{-x}]_{-1}^0 = 5e - 6.$$

$$\textbf{40 a)} f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

**b)**  $g = 2f'$ , donc une primitive sur  $] -1 ; +\infty[$  de  $g$  est  $2f$ .

$$\textbf{c)} \int_0^1 \left( e^{x+1} + \frac{2x}{x+1} \right) dx = [e^{x+1} + 2x - 2\ln(x+1)]_0^1 = e^2 + 2 - 2\ln 2 - e.$$

$$\textbf{41 a)} g(x) = \frac{e^{-x} \times 1}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

**b)** Une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $G(x) = -\ln(1+e^{-x})$ .

$$\textbf{c)} \int_{-1}^1 g(x) dx = [-\ln(1+e^{-x})]_{-1}^1 = \ln\left(\frac{1+e}{1+e^{-1}}\right) = \ln e = 1.$$

**42 a)** Pour tout  $x > 0$ ,  $u'(x) = \frac{1}{x}$ . D'où

$$u'(x) \cdot u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = f(x).$$

$$\textbf{b)} I = \int_1^e f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \times (1 + \ln x)^2 \right]_1^e = \frac{3}{2}.$$

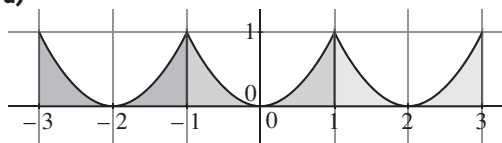
$$\textbf{44} \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + 2) dx + \int_2^6 \left( \frac{1}{2}x + 5 \right) dx + \int_6^{10} \left( \frac{1}{2}x^2 - 10x + 50 \right) dx = \frac{136}{3}.$$

**45 1. a)**



**b)** On passe de  $C_f$  à  $C_g$  par la translation de vecteur  $2\vec{OI}$  et de  $C_f$  à  $C_h$  par la translation de vecteur  $-2\vec{OI}$ .

**2. a)**



**b)** La courbe  $C_h$  se déduit de  $C_f$  par la translation de vecteur  $-2OI$  donc la partie de plan limitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 1$  a pour image par cette translation la partie de plan limitée par  $C_h$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -3$  et  $x = -1$ . Donc les aires de ces deux parties de plan sont égales.

La courbe  $C_g$  se déduit de  $C_f$  par la translation de vecteur  $2OI$  donc la partie de plan limitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 1$  a pour image par cette translation la partie de plan limitée par  $C_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$ . Donc les aires de ces deux parties de plan sont égales.

En conclusion, l'aire de la partie de plan limitée par la courbe représentative de  $i$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -3$  et  $x = 3$  est le triple de l'aire de la partie de plan limitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 1$ . D'où l'égalité demandée.

$$\text{c)} \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \text{ donc } \int_{-3}^3 i(x) dx = 2.$$

**47**

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**49 a)** Sur l'intervalle  $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ , la fonction cosinus est strictement décroissante donc pour tout  $x$  de cet intervalle  $\cos \frac{\pi}{3} \leq \cos x \leq \cos \frac{\pi}{6}$ .

**b)** On en déduit,  $x$  étant strictement positif sur l'intervalle  $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ ,  $\frac{1}{2x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{2x}$  d'où

$$\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{x} dx \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{x} dx.$$

On obtient ainsi l'encadrement demandé.

**50 1. a)**  $f'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x-8)^2}$ . Pour tout  $x$  de  $[-1; 3]$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $-2x+2$ . D'où le tableau de variation :

$x$	-1	1	3
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{5}$

**b)** Du tableau de variation on déduit que, pour tout  $x$  de  $[-1; 3]$ ,  $-\frac{1}{5} \leq f(x) \leq -\frac{1}{9}$ , donc  $\int_{-1}^3 -\frac{1}{5} dx \leq \int_{-1}^3 f(x) dx \leq \int_{-1}^3 -\frac{1}{9} dx$ . On obtient ainsi l'encadrement demandé.

**52 a)** L'aire est égale à  $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 (-f(x)) dx$ .

**b)** L'aire est égale à  $\int_{-6}^{-2} f(x) dx$ .

**54 a)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $-e^{2x} < 0$ , donc  $f(x) < 0$  sur  $[-1; 0]$ . L'aire demandée est donc :

$$\int_{-1}^0 e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}).$$

**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $2x^2 + 2x + 1 > 0$  (polynôme de degré 2 avec un discriminant négatif et un coefficient de  $x^2$  positif) donc  $f(x) > 0$  sur  $[-1; 0]$ . L'aire demandée est donc :

$$\int_{-1}^0 (2x^2 + 2x + 1) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}.$$

**c)**  $f(x) = \frac{-2+2x}{1+2x}$ ; sur  $[0; 3]$ , le dénominateur est strictement positif, donc  $f(x)$  est du signe de  $-2+2x$ , c'est-à-dire négatif pour tout  $x$  de  $[0; 1]$  et positif pour tout  $x$  de  $[1; 3]$ . L'aire demandée est donc :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (-f(x)) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \left[ -x + \frac{3}{2} \ln(1+2x) \right]_0^1 + \left[ x - \frac{3}{2} \ln(1+2x) \right]_1^3 \\ &= 1 + 3 \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 7. \end{aligned}$$

**55** Pour tout  $x$  de  $[-1; 2]$ ,  $f(x) > 0$  donc l'aire demandée, en unités d'aire, est :

$$\int_{-1}^2 e^{3x} dx = \left[ \frac{1}{3} e^{3x} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} (e^6 - e^{-3}).$$

*Remarque : on peut faire remarquer aux élèves que dans la définition de la partie de plan, on peut lire directement que  $f(x) > 0$ .*

**56** Pour tout  $x$  de  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ,  $g(x) < 0$  donc

l'aire demandée, en unités d'aire, est :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 ((-\sin(2x))) dx = \left[ \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 1.$$

Remarque : même indication qu'à l'exercice 55, avec  $g(x) < 0$ .

**58** Pour tout  $x$  de  $[1; 3]$ ,  $f(x) < 0$ , donc l'aire cherchée, en unités d'aire, est égale à

$$\int_1^3 (-f(x)) dx = \left[ \frac{5}{4} \ln(1+4x) \right]_1^3 = \frac{5}{4} \ln\left(\frac{13}{5}\right).$$

De plus, 1 u.a. = 2 cm<sup>2</sup> ; l'aire cherchée, en cm<sup>2</sup>, est

$$A = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{13}{5}\right).$$

**59 a)**  $F'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x = f(x)$  ; donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x)$  est du signe de  $(x-1)$ , donc négatif pour  $x < 1$  et positif pour  $x > 1$ . L'aire cherchée, en unités d'aire, est donc égale à

$$\int_{-2}^1 (-f(x)) dx + \int_1^2 f(x) dx = [- (x-2)e^x]_{-2}^1 + [(x-2)e^x]_1^2 = 2e^1 - 4e^{-2}.$$

De plus, 1 u.a. = 0,25 cm<sup>2</sup> ; l'aire cherchée, en cm<sup>2</sup>, est  $A = 0,5e^1 - e^{-2} \approx 1,22$ .

**60 a)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 + 4x + 8 > 0$  (polynôme de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif et un coefficient de  $x^2$  strictement positif), donc  $f(x)$  est du signe de  $2x + 4$ , c'est-à-dire négatif pour  $x < -2$  et positif pour  $x > -2$ .

**b)** L'aire cherchée est donc égale à

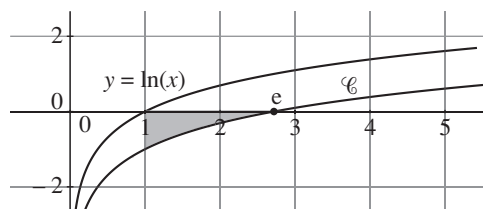
$$\int_{-3}^{-2} (-f(x)) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx = [-\ln(x^2 + 4x + 8)]_{-3}^{-2} + [\ln(x^2 + 4x + 8)]_{-2}^0 = \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

De plus, 1 u.a. = 4 cm<sup>2</sup>, donc l'aire cherchée en

$$\text{cm}^2 \text{ est } 4 \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

**61 a)** La courbe représentative de  $f$  se déduit de celle de  $h$  par la translation de vecteur  $-\overrightarrow{OJ}$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**b)** L'inéquation  $\ln x - 1 < 0$  équivaut à  $\ln x < 1$ , soit  $x < e$ . La courbe  $C$  est située en dessous de l'axe des abscisses pour  $x < e$  et au dessus de l'axe des abscisses pour  $x > e$ .

**c)**  $H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x = h(x)$ . On en déduit que  $H$  est une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

**d)** D'après les questions précédentes, l'aire cherchée, en unités d'aire, est égale à

$$\int_1^e (-f(x)) dx = [-x \ln x + x + x]_1^e = e - 2.$$

De plus, 1 u.a. = 2 cm<sup>2</sup> ; l'aire cherchée, en cm<sup>2</sup> est  $A = 2e - 4$ .

**62 a)** ch6\_ex62.ggb

**b)** Il semble que  $b$  tende vers 1 lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

$$\text{c) } \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1 \text{ et } \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{a} + 1 \right) = 1$$

Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\frac{1}{x^2} > 0$ , donc la courbe

d'équation  $y = \frac{1}{x^2}$  est située au-dessus de l'axe

des abscisses. L'intégrale  $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx$  est donc l'aire,

en unités d'aire, de la partie de plan limitée par cette courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = a$ . Lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ , cette aire tend vers 1 u.a.

**64 a)** L'aire est égale à  $\int_3^4 (f(x) - g(x)) dx$ .

**b)** L'aire est égale à  $\int_1^3 (f(x) - g(x)) dx$ .

**65** Soit  $h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + x + 2$  ; il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule pour  $x = -1$  et  $x = 2$  et qui est positive sur  $[-1; 2]$ . L'aire cherchée, en unités d'aire, est égale à

$$\int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$



De plus,  $1 \text{ u.a.} = 1,5 \times 1,5 \text{ cm}^2$ . L'aire cherchée, exprimée en  $\text{cm}^2$  est donc égale à  $4,5 \times 1,5^2 = 10,125$ .

$$\begin{aligned} \text{66} \quad \text{Soit } h(x) &= f(x) - g(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{7}x + \frac{8}{7} \\ &= \frac{-x^2 + 8x - 7}{7x} \end{aligned}$$

Pour tout  $x$  de  $[1 ; 4]$ ,  $7x > 0$  donc  $h(x)$  est du signe de  $-x^2 + 8x - 7$  ; il s'agit d'un polynôme de degré 2 qui s'annule en 1 et en 7. On en déduit que  $h$  est positive sur  $[1 ; 7]$ , donc sur  $[1 ; 4]$ . Sur cet intervalle, la courbe de  $f$  est donc située au dessus de la courbe de  $g$ . L'aire cherchée, en unités d'aire, est égale à

$$\begin{aligned} \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx &= \left[ -\ln x - \frac{x^2}{14} + \frac{8x}{7} \right]_1^4 \\ &= -\ln 4 + \frac{33}{14}. \end{aligned}$$

D'autre part  $1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$ , donc l'aire cherchée, en  $\text{cm}^2$ , est égale à  $-2 \ln 4 + \frac{33}{7}$ .

**67** L'aire cherchée est la différence entre l'aire de la partie de plan limitée par la courbe  $C$  et la droite  $D$  et l'aire de la partie de plan limitée par la courbe  $C$  et l'axe des abscisses. On a ici  $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ cm}^2$  donc, en  $\text{cm}^2$ , l'aire cherchée est égale à

$$\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3}{2}} \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2.$$

**69 a)** La valeur moyenne est

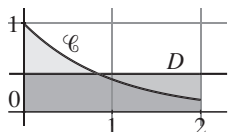
$$m = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{2}{x} dx = \frac{1}{e-1} [2 \ln x]_1^e = \frac{2}{e-1}.$$

**b)** La valeur moyenne est

$$m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

**70 a)**  $f'(x) = -e^{-x}$  ; Pour tout  $x$  de  $[0 ; 2]$ ,  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; 2]$ .

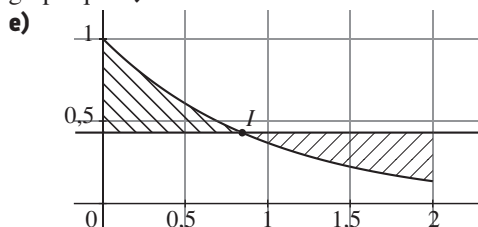
La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



$$\text{b) } \mu = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-2}}{2} \approx 0,43.$$

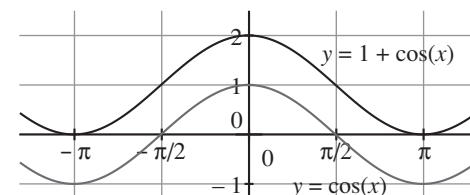
**c)** Voir graphique ci-dessus.

**d)** Le rectangle limité par la droite  $D$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$  a la même aire que la partie de plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$ . Voir graphique **a)**.



Les deux aires sont égales. En effet, la première partie de plan est celle qui « dépasse » du rectangle et la deuxième celle qui complète la partie rose du graphique du a) jusqu'au rectangle. Comme le rectangle et la partie rose ont la même aire, la partie de plan entre  $C$ ,  $D$ , l'axe des ordonnées et le point  $I$  a la même aire que la partie de plan entre  $D$ ,  $C$ , le point  $I$  et la droite d'équation  $x = 2$ .

**71 a)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**b)** La valeur moyenne de la fonction cosinus sur  $[-\pi ; \pi]$  est

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \frac{1}{2\pi} [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

La partie de la courbe située au dessus de l'axe des abscisses  $\left( x \in \left[ -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \right)$  délimite une partie du plan symétrique à celle composée des deux parties situées en dessous de l'axe des abscisses  $\left( x \in \left[ -\pi ; -\frac{\pi}{2} \right] \text{ et } x \in \left[ \frac{\pi}{2} ; \pi \right] \right)$ , ce qui explique que l'intégrale sur  $[-\pi ; \pi]$  est nulle.

**c)** La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[-\pi ; \pi]$  est

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} [x + \sin x]_{-\pi}^{\pi} = 1.$$

La courbe de  $f$  s'obtient à partir de la courbe de la fonction cosinus en faisant une translation de vecteur  $\overrightarrow{OJ}$ . La valeur moyenne de  $f$  sur un intervalle  $I$  s'obtient donc en ajoutant 1 à la valeur moyenne de la fonction cosinus sur le même intervalle  $I$ .

## Problèmes

**74 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{9}{2x-1} = +\infty$  donc

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{2x-1} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .

**b)** La courbe  $C$  admet la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  pour asymptote et la droite d'équation  $y = 3$  pour asymptote en  $+\infty$ .

**2. a)**  $f'(x) = \frac{18}{(2x-1)^2}$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ,  $f'(x) > 0$ .

**c)**

$x$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$2$

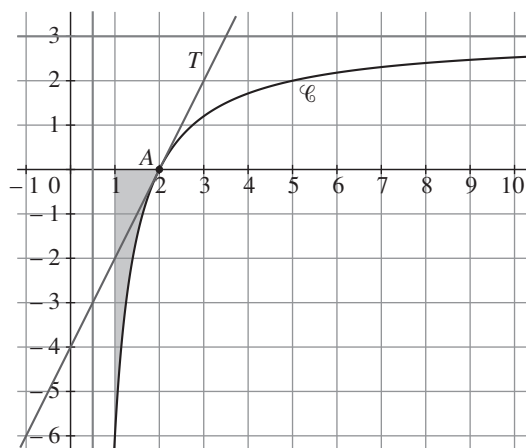
**3. a)** L'équation  $f(x) = 0$  équivaut à  $6x - 12 = 0$  et  $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ; elle admet pour unique solution  $x = 2$ .

**b)** La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  et  $f(2) = 0$  donc :

$x$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

**4. a)** Le coefficient directeur de  $T$  est  $f'(2) = 2$ .

**b)** La représentation ci-après n'est pas à l'échelle demandée.



**5. a)**  $F(x) = 3x - \frac{9}{2} \ln(2x-1)$ .

**b)** Voir graphique ci-dessus.

**c)** D'après la question **3. b)**, pour  $x$  compris entre 1 et 2, la courbe de  $f$  est située sous l'axe des abscisses donc :

$$S = \int_1^2 (-f(x)) dx = \left[ -3x + \frac{9}{2} \ln(2x-1) \right]_1^2 = \frac{9}{2} \ln(3) - 3 \approx 1,94.$$

**75 1. a)**  $f'(x) = -\ln x + 1$ .

**b)** L'inéquation  $f'(x) > 0$  est équivalente à  $\ln x < 1$ , soit  $x < e$ . On en déduit le tableau suivant :

**c)**

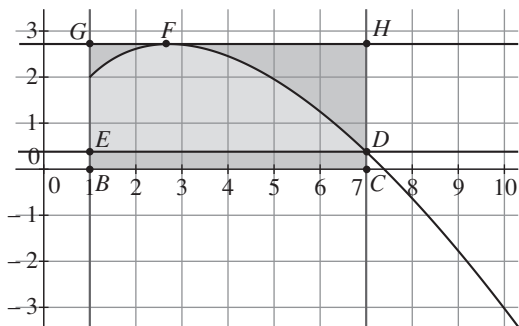
$x$	1	$e$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f$	2	$e$	$20 - 10 \ln(10)$

**2. a)** D'après le tableau de variation, l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[1; e]$  et admet une unique solution dans l'intervalle  $[e; 10]$  (car  $20 - 10 \ln(10) < 0$ ).

**b)** Pour  $x$  appartenant à  $[1; x_0]$ ,  $f(x)$  est positif et pour  $x$  appartenant à  $[x_0; 10]$ ,  $f(x)$  est négatif.

**c)** À la calculatrice, par encadrements successifs, on obtient 7,38 comme valeur approchée à  $10^{-2}$  près par défaut.

**3.** La représentation ci-après n'est pas à l'échelle demandée.



4. a)

$$F'(x) = 2x \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) + x^2 \left( -\frac{1}{2x} \right)$$

$$= \frac{5}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = 2x - x \ln x = f(x).$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[1; 10]$ .

b) Voir graphique ci-dessus.

c) Voir graphique ci-dessus : le point  $F$  est le point de coordonnées  $(e; e)$ , les points  $G$  et  $H$  appartiennent à la tangente à  $C$  en  $F$ .

L'aire de  $S$  est comprise entre l'aire du rectangle  $BCDE$  et l'aire du rectangle  $BCHG$ .

L'aire du rectangle  $BCDE$  est égale à  $6 \times f(7) = 6(14 - 7 \ln 7) \approx 2,27$  u.a.

L'aire du rectangle  $BCHG$  est égale à  $6e \approx 16,31$  u.a.

d) D'après ce qui précède,  $f$  est positive sur  $[1; 7]$  donc l'aire de  $S$ , en u.a., est égale à

$$\int_1^7 f(x) dx = [F(x)]_1^7 = 60 - \frac{49}{2} \ln 7 \approx 12,33.$$

De plus  $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ cm}^2$ . Donc l'aire en  $\text{cm}^2$  a la même valeur.

76 1. a)  $f'(x) = 4 - e^x$ .

b) L'inéquation  $4 - e^x > 0$  équivaut à  $x < \ln 4$ . On en déduit que  $f'(x)$  est positif pour tout  $[0; \ln 4[$ , nul en  $\ln 4$  et négatif pour tout  $x$  de  $]\ln 4; 2]$ .

c)  $f(0) = 0$  ;  $f(\ln 4) = 4 \ln 4 - 3 \approx 2,545$  ;  $f(2) = 9 - e^2 \approx 1,611$ .

d)

$x$	0	$\ln 4$	2
$f'(x)$		+	0 -
$f$	0	$4 \ln 4 - 3$	$9 - e^2$

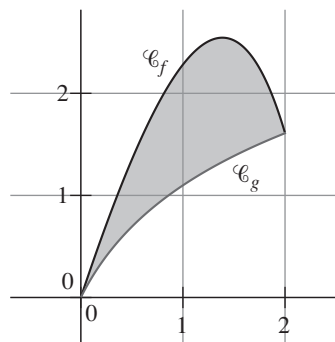
2. a)  $g'(x) = \frac{2}{2x+1}$ .

b) Pour tout  $x$  de  $[0; 2]$ ,  $2x+1 > 0$  donc  $g'(x) > 0$ .

c)  $g(0) = 0$  et  $g(2) = \ln 5 \approx 1,609$ .

$x$	0	2
$g'(x)$		+
$g$	0	$\ln 5$

3. La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



4. a)  $F(x) = 2x^2 + x - e^x$ .

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [2x^2 + x - e^x]_0^2 = 11 - e^2.$$

b)  $G'(x) = \ln(2x+1) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{2x+1} - 1 = g(x)$ .

La fonction  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $[0; 2]$ .

$$J = \int_0^2 g(x) dx = [G(x)]_0^2 = \frac{5}{2} \ln 5 - 2.$$

c) L'aire cherchée, en unités d'aire, est égale à  $I - J = 13 - e^2 - \frac{5}{2} \ln 5$  ; d'autre part  $1 \text{ u.a.} = 25 \text{ cm}^2$ .

L'aire cherchée, en  $\text{cm}^2$ , est égale à

$$25 \left( 13 - e^2 - \frac{5}{2} \ln 5 \right) \approx 39,68.$$

77 1. ch6\_pb77.ggb

a) On peut conjecturer que la limite de  $f$  en  $+\infty$  est 0 et que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) ch6\_pb77.ggb

c) On peut conjecturer que la limite de  $A$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$  est environ 0,69315.

2. a) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} + 1) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b)  $f'(x) = -\frac{9e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2}$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{3x} > 0$  et  $(e^{3x} + 1)^2 > 0$ , donc  $f'(x) < 0$ .

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**3. a)** Pour tout réel  $x$  :

$$3 - \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 1} = \frac{3e^{3x} + 3 - 3e^{3x}}{e^{3x} + 1} = f(x).$$

**b)**  $F(x) = 3x - \ln(e^{3x} + 1)$ .

**c) et d)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ , donc

$$A(a) = \int_0^a f(x) dx = [F(x)]_0^a \\ = 3a - \ln(e^{3a} + 1) + \ln 2.$$

$$\text{e) } A(a) = \ln(e^{3a}) - \ln(e^{3a} + 1) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e^{3a}}{e^{3a} + 1}\right).$$

$$\text{Pour tout réel } a, \ln\left(\frac{2e^{3a}}{e^{3a} + 1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-3a}}\right);$$

$$\text{d'où } \lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = \ln 2.$$

Ce résultat est cohérent avec la conjecture du **1. c)**.

**78** On étudie le signe de  $f(x)$  : l'inéquation  $1 - e^{2x} > 0$  est équivalente à  $x < 0$ . Donc, sur  $[0; 1]$ ,  $f(x) < 0$ . La courbe de  $f$  est en dessous de l'axe des abscisses pour  $x$  appartenant à  $[0; 1]$ . L'aire cherchée, en u.a., est donc égale

$$\text{à } \int_0^1 (-f(x)) dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2}.$$

D'autre part  $1 \text{ u.a.} = 8 \text{ cm}^2$ . L'aire cherchée, en  $\text{cm}^2$ , est donc égale à  $4e^2 - 12 \approx 17,6$ .

*Remarque : certains élèves vont peut-être se contenter d'une représentation à la calculatrice pour « voir » la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, ce qui est déjà une démarche qui montre qu'ils se préoccupent de cette question. D'autres risquent de trouver une aire négative et il est intéressant alors de voir s'ils vont se corriger, et comment.*

**79 1. a)**  $f(0) = 3$ ,  $f(8) = 6,2$  et  $f'(8) = 0$ . D'où le système proposé.

**b)** On obtient  $a = -\frac{1}{20}$ ,  $b = \frac{4}{5}$  et  $c = 3$ , d'où l'expression de la fonction.

**c)** La courbe de  $f$  est située au dessus de l'axe des abscisses et  $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ m}^2$ , donc

$$S = \int_0^8 f(x) dx = \left[ -\frac{x^3}{60} + \frac{2x^2}{5} + 3x \right]_0^8 \\ = \frac{616}{15} \approx 41,07.$$

*Remarque : on peut inciter les élèves à vérifier la cohérence de leur résultat en calculant l'aire du trapèze ABCD et l'aire du rectangle de côtés AB et BC.*

**2. a)** L'aire cherchée est

$$A(m) = \int_0^m f(x) dx = \left[ -\frac{x^3}{60} + \frac{2x^2}{5} + 3x \right]_0^m \\ = -\frac{m^3}{60} + \frac{2m^2}{5} + 3m.$$

**b)**  $g'(x) = f(x)$ , polynôme de degré 2 qui s'annule en  $8 - 2\sqrt{31}$  et  $8 + 2\sqrt{31}$ . Pour tout  $x$  de  $[0; 8]$ ,  $g'(x) > 0$ , donc  $g$  est strictement croissante sur  $[0; 8]$ .


$x$	0	8
$g'(x)$		+
$g$	0	$\frac{616}{15}$

**c)** D'après le tableau de variation,  $g(x)$  prend une fois et une seule toutes les valeurs comprises entre 0 et  $\frac{616}{15}$ , donc l'équation  $g(x) = \frac{308}{15}$  a une unique solution dans  $[0; 8]$ .

**d)** Par encadrements successifs, on obtient  $x_0$  compris entre 4,58 et 4,581.

**3.** L'équation  $A(m) = \frac{1}{2}S$  est équivalente à l'équation  $g(x) = \frac{308}{15}$ . Donc le découpage du terrain doit se faire à 4,58 mètres de A.

**80 1.** L'intégrale est égale à l'aire de la partie de plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 4$ . Cette aire peut donc être encadrée entre la somme des aires des rectangles du graphique 2 et la somme des aires des rectangles du graphique 1.

**2. a)**  ch6\_pb80.ods, feuille « professeur\_2 »


**b)** Dans la cellule B5 on entre : « = 4/B1 »

**c)** Dans E3 on entre 0. Dans E4 : « = E3 + \$B\$5 ».

**d)** On calcule l'aire du rectangle de côtés  $[OI]$  et  $[OM_0]$  en multipliant sa largeur (qui se trouve dans la cellule B5) par sa longueur (qui se trouve dans la cellule E3).


**e)** Dans G4 on entre : « = G3 + F4 ».

Dans la cellule G6 on obtient une valeur approchée par excès de l'intégrale.

**f)**  ch6\_pb80.ods, feuille « professeur\_2 »


Dans la cellule J6 on obtient une valeur approchée par défaut de l'intégrale.

$$\text{g) } 1,72 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 3,6.$$

3. a)  ch6\_pb80.ods, feuille « professeur\_3 »

$$2,27 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 3,03.$$

4. a) On doit aller jusqu'à la ligne 102.

 ch6\_pb80.ods, feuille « professeur\_4a »

$$2,61 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 2,69.$$

b)  ch6\_pb80.ods, feuille « professeur\_4b »

Une valeur approchée de l'intégrale à  $10^{-2}$  près est 2,65.

**81 A 1. a)** Le sommet de la parabole a pour abscisse 2.

b) Voir représentation ci-dessous (**partie C**).

$$2. G(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x.$$

$$3. I = \int_0^3 g(x) dx = \left[ \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x \right]_0^3 = 3.$$

**B 1. a)**  $h'(x) = \frac{3}{x}.$

b) Pour tout  $x$  de  $[3;6]$   $h'(x) > 0$ , donc  $h$  est strictement croissante sur  $[3;6]$ .

c) Le coefficient directeur de  $T$  est  $h'(3) = 1$ .

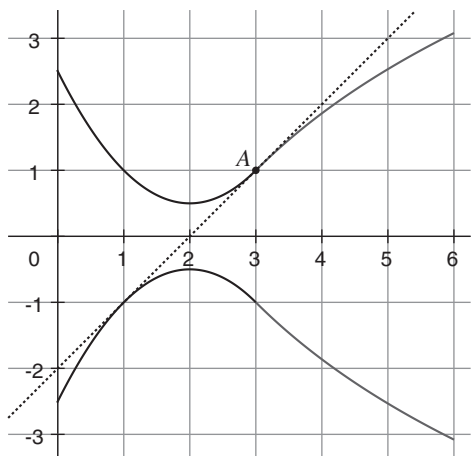
2.

$x$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$h(x)$	1	1,46	1,86	2,22	2,53	2,82	3,08

3. a)  $H'(x) = 3 \ln x + 3 - 3 \ln 3 - 2 = h(x)$ .  
Donc  $H$  est une primitive de  $h$  sur  $[3;6]$ .

b)  $J = \int_3^6 h(x) dx = [H(x)]_3^6 = 18 \ln 2 - 6 \approx 6,48.$

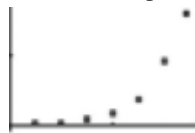
**C 1.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



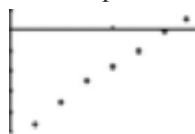
2. L'aire de la partie de plan comprise entre  $C$  et l'axe des abscisses, en u.a., est  $I + J$ . Par symé-

trie, l'aire de la partie de plan entre  $C'$  et l'axe des abscisses, en u.a., est égale à  $I + J$ ; de plus  $1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$ . Donc l'aire cherchée est  $2 \cdot 2(I + J)$ , soit  $38 \text{ cm}^2$  à l'unité près.

**82 1. a)** Les points ne sont pas alignés.



b) Les points sont assez proches de l'alignement.



c) La droite  $(AB)$  a pour coefficient directeur  $m = \frac{-0,1 + 3,5}{1,5 - 0,5} = 3,4$ . De plus elle passe par  $A$  donc l'ordonnée à l'origine est  $p = -3,5 - 0,5 \times 3,4 = -5,2$ .  
Une équation de la droite  $(AB)$  est  $y = 3,4x - 5,2$ .



On constate que les points du graphique sont très proches voire même sur la droite  $d$ .

d) On a alors :  $Z = e^{3,4Y - 5,2}$ .

2. a) On a  $e^{3,4 \times 1,4 - 5,2} \approx 0,64$  à  $10^{-2}$  près.

b) Sur  $[0; 1,4]$ , la courbe  $C$  est en dessous de  $\Delta$  (On peut ici se contenter d'une lecture graphique, mais on peut aussi faire chercher par le calcul la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ ).

L'aire cherchée est alors, en u.a.,

$$\int_0^{1,4} (0,64 - e^{3,4Y - 5,2}) dY = \left[ 0,64Y - \frac{e^{3,4Y - 5,2}}{3,4} \right]_0^{1,4} = 0,896 - \frac{1}{3,4} (e^{-0,44} - e^{-5,2}).$$

c) L'aire de la surface immergée du maître couple est  $0,7082 \text{ m}^2$ , valeur arrondie au  $\text{cm}^2$  près.

**83 a)**  $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E dt = \alpha E.$

\* La valeur moyenne est la hauteur d'un rectangle de largeur  $T$  dont l'aire est égale à l'aire limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = T$ . On a donc  $VT = E\alpha T$ , d'où  $V = E\alpha$ .

b)  $\bar{V}$  varie dans  $[0; E]$ .

**84 1. a)**

$$V_{\text{leff}} = \frac{2\sqrt{2}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega t) dt = \frac{2\sqrt{2}}{T} \left[ -\frac{E}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ = \frac{2E\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$\text{b) } V_{3\text{eff}} = \frac{2\sqrt{2}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(3\omega t) dt \\ = \frac{2\sqrt{2}}{T} \left[ -\frac{E}{3\omega} \cos(3\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2E\sqrt{2}}{3\pi}.$$

**2. a)**

$$V_{\text{leff}} = \frac{2\sqrt{2}}{T} \int_{t_1}^{\frac{T}{2}-t_1} E \sin(\omega t) dt \\ = \frac{2\sqrt{2}}{T} \left[ -\frac{E}{\omega} \cos(\omega t) \right]_{t_1}^{\frac{T}{2}-t_1} = \frac{2E\sqrt{2}}{\pi} \cos(\omega t_1).$$

On a  $-1 \leq \cos(\omega t_1) \leq 1$ , donc

$$0 \leq \cos^2(\omega t_1) \leq 1.$$

La valeur efficace du premier harmonique est donc inférieure à celle obtenue par la première méthode. La puissance du moteur est donc plus faible.

$$\text{b) } V_{3\text{eff}} = \frac{2\sqrt{2}}{T} \int_{t_1}^{\frac{T}{2}-t_1} E \sin(3\omega t) dt \\ = \frac{2\sqrt{2}}{T} \left[ -\frac{E}{3\omega} \cos(3\omega t) \right]_{t_1}^{\frac{T}{2}-t_1} \\ = \frac{2E\sqrt{2}}{3\pi} \cos(3\omega t_1).$$

c) L'équation  $V_{3\text{eff}} = 0$  est équivalente à  $\cos(3\omega t_1) = 0$ , soit

$$3\omega t_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ La plus petite valeur positive de } t_1 \text{ est donc } t_1 = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{6} \times \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{12}.$$

Si on prend  $t_1 = \frac{T}{12}$ , alors

$$V_{\text{leff}} = \frac{2E\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\frac{\omega T}{12}\right) = \frac{E\sqrt{6}}{\pi}.$$

**85** Dans le fichier `ch6_pb85.ggb`, on trouvera la courbe de la fonction  $v_s$  que l'on peut modifier

en modifiant  $\theta_0$ . Dans la fenêtre algèbre la valeur efficace  $v_e$  est affichée en rouge.

$$\text{1. a) } \bar{v}_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_s(\theta) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\theta_0}^{\pi} V \sin(\theta) d\theta + \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} V \sin(\theta) d\theta \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \left( [-V \cos \theta]_{\theta_0}^{\pi} + [-V \cos \theta]_{\pi+\theta_0}^{2\pi} \right) = 0$$

b) La partie de plan limitée par la courbe de  $v_s$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \pi$  et celle limitée par la courbe de  $v_s$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = \pi$  et  $x = 2\pi$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Leurs aires sont donc égales, et les intégrales de  $v_s$  sur ces deux demi-périodes sont donc opposées. On en déduit que l'intégrale de  $v_s$  sur une période est nulle.

**2. a)**

$$v_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_s^2(\theta) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\theta_0}^{\pi} V^2 \sin^2(\theta) d\theta + \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} V^2 \sin^2(\theta) d\theta \right) \\ = \frac{V^2}{2\pi} \left( \int_{\theta_0}^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta + \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right).$$

b)

$$v_{\text{eff}}^2 = \frac{V^2}{4\pi} \left( \int_{\theta_0}^{\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta + \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \right) \\ = \frac{V^2}{4\pi} \left( \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{\theta_0}^{\pi} + \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{\pi+\theta_0}^{2\pi} \right),$$

d'où le résultat indiqué.

c)  $f'(\theta) = -2 + 2 \cos(2\theta) = 2(\cos(2\theta) - 1)$ . Pour tout  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $\cos(2\theta) \leq 1$ , donc  $f'(\theta) \leq 0$  (nul en 0 et en  $\pi$ ). La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $[0; \pi]$ .

**3. a)** L'éclairement est maximal lorsque  $v_{\text{eff}}^2$  est maximal, donc pour  $\theta_0 = 0$ . On a alors  $v_{\text{eff}}^2 = \frac{V^2}{2}$ .

b) Pour  $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $v_{\text{eff}}^2 = \frac{V^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$ . On a donc  $v_{\text{eff}}^2 = \frac{V^2}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right)$ . Le carré de la valeur effi-

cace est donc multiplié par  $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}} \approx 0,3$ ,  
donc la valeur efficace par  $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}} \approx 0,3$ .

L'éclairement étant proportionnel à la valeur efficace de la tension, on obtient 30 % de l'éclairement maximal en prenant  $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ .

## Vers le Bac

**86** 1. a) 2. a) 3. c) 4. c) 5. b)

**87** 1.  $F'(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$   
 $= (-2+x)e^{-x} = f(x).$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. a) Pour tout  $x > 2$ ,  $f(x) > 0$ . La courbe  $C$  est au dessus de l'axe des abscisses pour  $x > 2$ . On en déduit que

$$A(a) = \int_2^a f(x) dx = [F(x)]_2^a = (1-a)e^{-a} + e^{-2}$$

b)  $A(a) = (1-a)e^{-a} + e^{-2} = e^{-a} - \frac{a}{e^a} + e^{-2}.$

On a  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{a} = +\infty$ , donc  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} = 0$  ;  
d'autre part  $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a} = 0$  ; on peut donc conclure :  
 $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = e^{-2}.$

**88** 1.  $f(0) = 4$  et  $f(0) = a - 1$ , d'où  $a = 5$ .

2. La courbe  $C$  semble être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Or, pour tout  $x$  de  $[-8; 8]$ ,  $f(-x) = f(x)$ . On en déduit que pour tout point  $M$  de  $C$  d'abscisse  $x$ , le point symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des ordonnées appartient à  $C$ . La courbe  $C$  est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3.  $f'(x) = -\frac{0,2e^{0,2x} - 0,2e^{-0,2x}}{2}$   
 $= \frac{1}{10}(e^{-0,2x} - e^{0,2x})$   
 $= \frac{1}{10}e^{-0,2x}(1 - e^{0,4x}).$

4.  $f'(0) = 0$ . Le coefficient directeur de  $T$  est 0. La tangente au point d'abscisse 0 est horizontale.

5. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $e^{-0,2x} < 0$ , donc l'inéquation est équivalente à  $1 - e^{0,4x} > 0$ , soit  $x < 0$ . L'inéquation  $f'(x) > 0$  a pour ensemble de solutions  $[-8; 0]$ .

6.

$x$	-8	0	8
$f'(x)$	+	0	-
$f$			

7. La hauteur maximale d'un véhicule passant sous le pont est

$$f(4) - 0,5 = 4,5 - \frac{e^{0,8} + e^{-0,8}}{2} \approx 3,16 \text{ mètres}$$

(au cm près).

**2** 1.  $I = [5e^{0,2x} - 5e^{-0,2x}]_{-8}^8 = 10(e^{1,6} - e^{-1,6})$

2. L'aire cherchée, en u.a., est

$$\int_{-8}^8 (5 - f(x)) dx = \frac{1}{2} I = 5(e^{1,6} - e^{-1,6}) ; \text{ comme } -8$$

1 u.a. = 1 m<sup>2</sup>, la valeur est la même en m<sup>2</sup>.

3. Il y a deux faces de pont à peindre, d'où le résultat indiqué.

4. On a besoin de  $\frac{10(e^{1,6} - e^{-1,6})}{0,3} \approx 158,37$

litres, soit 6 bidons de 30 litres.

**89** 1. a)  $r_0 = 0,5e^{0,25}$  et  $r_1 = 0,5e$ .  
b)  $A < 0,5(e^{0,25} + e).$

2. a) L'utilisateur entre la valeur de  $n$ .

b) Si  $n = 2$ , pour  $i = 0$ ,  $r$  prend la valeur  $0,5e^{0,25}$ ,  $S$  prend la valeur  $0,5e^{0,25}$  ; pour  $i = 1$ ,  $r$  prend la valeur  $0,5e$ ,  $S$  prend la valeur  $0,5(e^{0,25} + e)$ , la valeur de  $S$  s'affiche.

Lorsque  $i = 0$ ,  $r$  prend la valeur  $r_0$  de la question 1 ; lorsque  $i = 1$ ,  $r$  prend la valeur  $r_1$  de la question 1. La grandeur  $S$  affichée est la valeur approchée par excès de  $A$  calculée au 1. b).

c) L'algorithme calcule les aires de 10 rectangles, chacun ayant une largeur de 0,1.

La valeur obtenue est une valeur approchée par excès de  $A$ .

d) Pour avoir une valeur approchée par défaut, il suffit d'utiliser les rectangles de même base mais ayant pour hauteur l'image par  $f$  de l'abscisse du point à gauche du rectangle, soit, pour le rectangle premier rectangle  $f(0)$ , pour le deuxième

$f\left(\frac{1}{n}\right)$ ... et pour le  $i^{\text{ème}}$  rectangle  $f\left(\frac{i}{n}\right)$ . Il suffit donc de modifier la ligne de calcul de  $r$  dans l'algorithme :  $r$  prend la valeur  $\frac{1}{n}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$ .

## 7

Équations  
différentielles

## Activités

## Activité 1 Température dans un processeur

Dans cette activité, on introduit par un exemple concret la notion d'équation différentielle et la notion de solutions d'une telle équation. On voit dans la dernière question l'utilité de déterminer une solution particulière, vérifiant la condition initiale connue dans le contexte considéré : on utilise ici cette solution pour vérifier que le ventilateur utilisé est suffisant.

❶ En remplaçant  $P_1(t)$  et  $P_2(t)$  respectivement par  $Cf'(t)$  et  $f(t)$ , on obtient, pour tout réel  $t$  positif :  $P = Cf'(t) + \alpha f(t)$  soit, avec les valeurs numériques données :  $130 = 0,13f'(t) + 3,9 f(t)$ . En divisant cette dernière égalité par 0,13, on obtient l'égalité cherchée.

❷ a) Pour tout réel  $t$  positif,  $g'(t) = 0$  ;  $g'(t) + 30g(t) = 30k$ .

D'où  $g'(t) + 30g(t) = 1000$  si et seulement si  $30k = 1000$  soit  $k = \frac{100}{3}$ .

b)  $f(0) = 0$  ; or  $g(0) = \frac{100}{3}$  donc  $g$  ne peut pas être la fonction  $f$  cherchée.

❸ a) Pour tout réel  $t$  positif,  $h'(t) = ae^{at}$  ;  $h'(t) + 30h(t) = ae^{at} + 30\left(e^{at} + \frac{100}{3}\right) = (a + 30)e^{at} + 1000$ .

D'où  $h'(t) + 30h(t) = 1000$  si et seulement si  $a = -30$ .

b)  $h(0) = \frac{103}{3}$  or  $f(0) = 0$  donc  $h$  ne peut pas être la fonction  $f$  cherchée.

❹ a) Pour tout réel  $t$  positif,  $m'(t) = -30be^{-30t}$  ;

$$m'(t) + 30m(t) = -30be^{-30t} + 30\left(be^{-30t} + \frac{100}{3}\right) = -30be^{-30t} + 30be^{-30t} + 1000 = 1000.$$

On en conclut que, quelle que soit la valeur de  $b$ ,  $m$  est une solution de l'équation différentielle  $y' + 30y = 1000$ .

b)  $m(0) = b + \frac{100}{3}$  ;  $m(0) = 0$  si et seulement si  $b + \frac{100}{3} = 0$  soit  $b = -\frac{100}{3}$ .

❺ a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{100}{3}$ .

b) Pour tout réel  $t$  positif,  $f'(t) = 1000e^{-30t}$  ;  $f'(t) > 0$  sur  $[0; +\infty[$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .



$t$	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f$	0	$\frac{100}{3}$

c)  $72,6 - 39 = 33,6$  donc l'écart entre la température ambiante et celle du processeur ne doit pas dépasser 33,6, ce qui est le cas ici puisque d'après le tableau de variation de  $f$ , cet écart est strictement inférieur à  $\frac{100}{3}$  (et  $\frac{100}{3} < 33,6$ ) donc le système de refroidissement installé est suffisant.

## Activité 2 Rencontre du troisième type

Dans cette activité, on constate que certaines fonctions sont liées par des relations simples à leur fonction dérivée (partie A) ou dérivée seconde (partie B). On introduit ainsi, d'une façon différente de l'activité 1, l'idée d'équation différentielle ; on travaille alors sur les différentes fonctions vérifiant la même relation et ainsi sur la notion de solutions d'une équation différentielle.

**A 1 a)** Pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 2e^{2x}$  donc  $g' = 2g$ .

**b)** Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = 10e^{2x}$  donc  $h' = 2h$ .

**2 a)** On note  $f_1(x) = \cos(2x)$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) = -2 \sin(2x)$  et  $2f_1(x) = 2 \cos(2x)$  ;  $f_1'(x)$  n'est pas égal à  $2f_1(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  donc  $f_1$  n'est pas solution de  $(E_1)$ .

On note  $f_2(x) = -7e^{2x}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_2'(x) = -14e^{2x} = 2(-7e^{2x})$  donc  $f_2$  est solution de  $(E_1)$ .

On note  $f_3(x) = \ln(2x)$ . Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f_3'(x) = \frac{1}{x}$  et  $2f_3(x) = 2 \ln(2x)$  ;  $f_3'(x)$  n'est pas égal à  $2f_3(x)$  pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  donc  $f_3$  n'est pas solution de  $(E_1)$ .

On note  $f_4(x) = e^{2x+3}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_4'(x) = 2e^{2x+3}$  donc  $f_4$  est solution de  $(E_1)$ .

On note  $f_5(x) = 5 + e^{-2x}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_5'(x) = -2e^{-2x}$  et  $2f_5(x) = 2(5 + e^{-2x})$  ;  $f_5'(x)$  n'est pas égal à  $2f_5(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  donc  $f_5$  n'est pas solution de  $(E_1)$ .

**b)** La fonction  $x \mapsto 3e^{2x}$  est solution de  $(E_1)$ .

**c)** Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2Ce^{2x} = 2f(x)$  donc, quelle que soit la valeur de  $C$ , cette fonction est solution de  $(E_1)$ .

**3 a)** On note  $f_1(x) = x + 2$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) = 1$  ;  $f_1'(x) + 3f_1(x) = 1 + 3(x + 2) = 3x + 7$ . Or  $3x + 7$  n'est pas égal à 6 pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , donc  $f_1$  n'est pas solution de  $(E_2)$ .

On note  $f_2(x) = 5e^{-3x} + 2$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_2'(x) = -15e^{-3x}$  ;  $f_2'(x) + 3f_2(x) = -15e^{-3x} + 3(5e^{-3x} + 2) = 6$  donc  $f_2$  est solution de  $(E_2)$ .

On note  $f_3(x) = \cos(2x)$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_3'(x) = -2 \sin(2x)$  ;  $f_3'(x) + 3f_3(x) = -2 \sin(2x) + 3 \cos(2x)$ .

Or  $-2 \sin(2x) + 3 \cos(2x)$  n'est pas égal à 6 pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , donc  $f_3$  n'est pas solution de  $(E_2)$ .

On note  $f_4(x) = -7e^{-3x} + 2$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_4'(x) = 21e^{-3x}$  ;  $f_4'(x) + 3f_4(x) = 21e^{-3x} + 3(-7e^{-3x} + 2) = 6$  donc  $f_4$  est solution de  $(E_2)$ .

On note  $f_5(x) = 5e^{-3x} + 4$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_5'(x) = -15e^{-3x}$  ;  $f_5'(x) + 3f_5(x) = -15e^{-3x} + 3(5e^{-3x} + 4) = 12 \neq 6$  donc  $f_5$  n'est pas solution de  $(E_2)$ .

**b)**  $f_4(0) = -7e^0 + 2 = -5$  donc  $f_4$  prend la valeur  $-5$  en 0. Ce n'est pas le cas de l'autre fonction solution.

**c)** La fonction  $x \mapsto e^{-3x} + 2$  est une solution de  $(E_2)$  telle que  $f(0) = 3$ .

**B 1 a)** Pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = -3 \sin(3x)$  ;  $g''(x) = -9 \cos(3x)$ .

Donc  $g'' = -9g$ .

**b)** Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = -6 \cos(3x)$  ;  $h''(x) = 18 \sin(3x)$ .

Donc  $h'' = -9h$ .

**2 a)** On note  $f_1(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$  et  $f_1''(x) = -9\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$  ;

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f_1''(x) + 9f_1(x) = -9\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 9\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ . Donc  $f_1$  est solution de  $(E_3)$ .

On note  $f_2(x) = -7e^{3x}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_2'(x) = -21e^{3x}$  et  $f_2''(x) = -63e^{3x}$  ;

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f_2''(x) + 9f_2(x) = -63e^{3x} + 9(-7e^{3x}) = -126e^{3x} \neq 0$ . Donc  $f_2$  n'est pas solution de  $(E_3)$ .

On note  $f_3(x) = 2\cos(3x) - 5\sin(3x)$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f_3'(x) = -6\sin(3x) - 15\cos(3x)$  et

$f_3''(x) = -18\cos(3x) + 45\sin(3x)$  ;

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f_3''(x) + 9f_3(x) = -18\cos(3x) + 45\sin(3x) + 9(2\cos(3x) - 5\sin(3x)) = 0$ .

Donc  $f_3$  est solution de  $(E_3)$ .

**b)** La fonction  $x \mapsto \cos(3x) + \sin(3x)$  est solution de  $(E_2)$ .

**3 a)** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -3C_1\sin(3x) + 3C_2\cos(3x)$  et  $f''(x) = -9C_1\cos(3x) - 9C_2\sin(3x) = -9(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))$  d'où, pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = -9f(x)$  ; donc  $f$  est solution de  $(E_3)$ .

**b)**  $f(0) = C_1$  ;  $f'(0) = 3C_2$ .

On a alors  $C_1 = 2$  et  $3C_2 = 0$  soit  $C_2 = 0$ .


La solution cherchée est la fonction  $x \mapsto 2\cos(3x)$ .

## Travaux Pratiques

### TP 1 Une histoire de famille


Dans ce TP, on visualise, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, les courbes des solutions d'une équation différentielle. Dans la partie A, il s'agit d'une équation du premier ordre et on remarque ainsi que fixer une condition initiale revient à imposer l'appartenance d'un point à la courbe de la fonction solution cherchée. On peut alors conjecturer graphiquement l'existence et l'unicité d'une telle solution. Dans la partie B, il s'agit d'une équation différentielle du second ordre. On utilise les représentations graphiques des solutions pour voir qu'une seule condition ne suffit pas à déterminer une solution. On peut visualiser que deux conditions ne sont pas toujours « compatibles » ou pas toujours « indépendantes », mais que deux conditions pour une même valeur de  $x$ , l'une pour la fonction, l'autre pour sa dérivée, permettent d'obtenir une unique solution.

**A 1** Les solutions de  $(E_1)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto ke^{-3x} + \frac{2}{3}$ , où  $k$  est une constante réelle.

**2 a)**  ch7\_tp1\_A.ggb

**b)** La fonction  $f_k$  semble croissante sur  $\mathbb{R}$  lorsque  $k < 0$  ; elle semble décroissante sur  $\mathbb{R}$  lorsque  $k > 0$  et constante lorsque  $k = 0$ .

**c)** Pour tout réel  $x$ ,  $f_k'(x) = -3ke^{-3x}$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $e^{-3x} > 0$  donc  $f_k'(x)$  est du signe de  $-k$ , c'est-à-dire positif lorsque  $k < 0$  ; négatif lorsque  $k > 0$  et nul lorsque  $k = 0$ . On en déduit le sens de variation de  $f_k$  conjecturé à la question précédente.


**3 a)**  ch7\_tp1\_A.ggb

Pour  $k = 47$ , il semble que la courbe  $C_k$  passe par le point A.

**b)** La courbe  $C_k$  passe par A si et seulement si  $f_k(1) = 3$ .

Or  $f_k(1) = ke^{-3} + \frac{2}{3}$  ; donc  $f_{k_0}(1) = 3 \Leftrightarrow k_0e^{-3} + \frac{2}{3} = 3 \Leftrightarrow k_0 = \frac{7e^3}{3}$ .

$\frac{7e^3}{3} \approx 46,9$  à  $10^{-1}$  près. On retrouve la conjecture émise à la question **3. a)**.

**4**  ch7\_tp1\_A.ggb

Pour la vérification, reprendre la même démarche qu'à la question **3. b)**.

5 Il semble qu'il existe une unique solution de  $(E_1)$  dont la courbe passe par un point donné. Cette conjecture est confirmée par le théorème du cours sur l'unicité d'une solution d'une équation différentielle du premier ordre satisfaisant une condition initiale donnée.

**B 1** Les solutions de  $(E_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**2 a)** ch7\_tp1\_B.ggb

**b)** ch7\_tp1\_B.ggb

Les couples  $(2; 3)$ ,  $(2; -5)$  et  $(2; 0,7)$  semblent convenir.

**c)** ch7\_tp1\_B.ggb

Le couple  $(2; 3)$  semble convenir.

**d)** La courbe  $\Gamma_{\lambda, \mu}$  passe par  $A$  et  $B$  si et seulement si  $g_{\lambda, \mu}(0) = 2$  et  $g_{\lambda, \mu}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ .

Or  $g_{\lambda, \mu}(0) = \lambda$  et  $g_{\lambda, \mu}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mu$  donc  $\lambda_0 = 2$  et  $\mu_0 = 3$ .

On retrouve la conjecture émise à la question **3. c)**.

**e)** La période de la fonction  $g_{\lambda, \mu}$  est  $\pi$ .

Comme  $g_{\lambda, \mu}$  est  $\pi$ -périodique, alors  $g_{\lambda, \mu}(\pi) = g_{\lambda, \mu}(0)$ ; or  $g_{\lambda, \mu}(0) = 2 \neq -1$ . Donc il n'existe pas de solution de  $(E_2)$  dont la courbe passe par les points  $A$  et  $C$ .

**3 a)** ch7\_tp1\_B.ggb. On choisit  $\lambda = 2$  et  $\mu = 1$ .

**b)** Il semble que pour  $\mu = 0,5$ , la tangente à  $\Gamma_{\lambda, \mu}$  passant par le point  $A$  a un coefficient directeur  $m = 1$ .

**c)** ch7\_tp1\_B.ggb

**d)** La courbe  $\Gamma_{\lambda, \mu}$  passe par  $A$  si et seulement si  $g_{\lambda, \mu}(0) = 2$ . Elle admet en  $A$  une tangente de coefficient directeur  $m = 1$  si et seulement si  $g_{\lambda, \mu}'(0) = 1$ .

Or  $g_{\lambda, \mu}(0) = \lambda$  donc  $\lambda = 2$ ;  $g_{\lambda, \mu}'(x) = -2\lambda \sin(2x) + 2\mu \cos(2x)$  donc  $g_{\lambda, \mu}'(0) = 2\mu$  d'où  $\mu = \frac{1}{2}$ .

On retrouve bien le résultat conjecturé à la question **b)**.

4 Il semble qu'il existe plusieurs solutions de  $(E_2)$  dont la courbe passe par un point donné; qu'il n'existe pas nécessairement une solution passant par deux points donnés; qu'il existe une unique solution de  $(E_2)$  dont la courbe passe par un point donné et admet en ce point une tangente de coefficient directeur donné. Cette dernière conjecture est confirmée par le théorème du cours sur l'unicité d'une solution d'une équation différentielle du second ordre satisfaisant deux conditions initiales données, l'une sur la fonction et l'autre sur sa dérivée pour une valeur de  $x$  fixée.

## TP 2 Contrôle automatique du cap d'un bateau

Dans ce TP, on modélise le comportement d'un bateau soumis à un brusque changement de cap en utilisant deux types de modèle: le modèle discret (partie A) et le modèle continu (partie B). Le travail de la partie A permet de revenir sur les suites, et celui de la partie B concerne les équations différentielles. C'est l'occasion de faire la comparaison entre ces deux modèles qui correspondent à deux types de système, l'analogique et le numérique.

**A 1 a)** Il existe un réel  $k$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ :

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{10(n+1) - 10n} = k(20 - C_n) \Leftrightarrow \frac{C_{n+1} - C_n}{10} = k(20 - C_n) \Leftrightarrow C_{n+1} - C_n = 10k(20 - C_n).$$

**b)**  $C_{n+1} = 10k(20 - C_n) + C_n = 200k + (1 - 10k)C_n$ .

**2 a)** Pour tout entier naturel  $n$ :

$$u_{n+1} = 20 - C_{n+1} = 20 - 200k - (1 - 10k)C_n = 20(1 - 10k) - (1 - 10k)C_n = (1 - 10k)(20 - C_n) = (1 - 10k)u_n.$$

**b)** La suite  $(u_n)$  est géométrique de premier terme  $u_0 = 20 - C_0 = 20$  et de raison  $1 - 10k$ .

**c)** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 20(1 - 10k)^n$ .

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $20 - C_n = 20(1 - 10k)^n$ , soit  $C_n = 20 - 20(1 - 10k)^n$ .

**9 a)**  $C_1 = 20 - 20(1 - 10k) = 5,9$ ; on en déduit que  $k = \frac{5,9}{200} = 0,0295$ .

**b)** Pour tout entier naturel  $n$ :  $C_n = 20 - 20(1 - 10 \times 0,0295)^n = 20 - 20 \times 0,705^n$ .

**c)**  $20 - C_n < 10^{-2} \Leftrightarrow 20 \times 0,705^n < 10^{-2} \Leftrightarrow 0,705^n < \frac{10^{-2}}{20} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{10^{-2}}{20}}{\ln 0,705}$ ; or  $\frac{\ln \frac{10^{-2}}{20}}{\ln 0,705} \approx 21,74$  donc

il faut 220 secondes (à 10 secondes près) pour un changement de cap de  $20^\circ$  à  $10^{-2}^\circ$  près.

**B 1 a)**  $C'(t) = m(20 - C(t)) \Leftrightarrow C'(t) + mC(t) = 20m$ .

L'équation (E) est bien de la forme  $y' + ay = b$ , avec  $a = m$  et  $b = 20m$ .

**b)** Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto ke^{-mt} + 20$ , où  $k$  est une constante réelle.

**c)**  $C(0) = 0$  donc  $k + 20 = 0$  soit  $k = -20$ . Alors  $C(t) = -20e^{-mt} + 20 = 20(1 - e^{-mt})$ .

**d)**  $C(10) = 20(1 - e^{-10m}) = 5,9 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{10} \ln\left(1 - \frac{5,9}{20}\right) \approx 0,035$ .

**2 a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 20$ .

**b)** Pour tout réel  $t$  positif,  $C'(t) = 0,7e^{-0,035t}$ . Donc  $C'(t) > 0$  et  $C$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

**c)**  $20 - C(t) < 10^{-2} \Leftrightarrow 20e^{-0,035t} < 10^{-2} \Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,035} \ln \frac{10^{-2}}{20}$ . Or  $-\frac{1}{0,035} \ln \frac{10^{-2}}{20} \approx 217,2$ .

Selon ce modèle, le temps nécessaire à un changement de cap de  $20^\circ$  à  $10^{-2}^\circ$  près est de 217,2 secondes (à 0,1 s près). Ce résultat est proche de celui de la question **A. 3. d)** (220 s).

## Exercices

**2 a)**  $f'(x) = e^x - \sin x$ ;  $f''(x) = e^x - \cos x$ ;  $f''(x) + f(x) = 2e^x - \cos x + \sin x = 2e^x$ . Or,  $2e^x$  n'est pas égal à  $2e^x + 1$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  n'est pas solution de (E).

**b)**  $f'(x) = 77,1e^{-0,514x}$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{0,514} f'(x) + f(x) = \frac{1}{0,514} 77,1e^{-0,514x} + 170 - 150e^{-0,514x} = 170$$

donc  $f$  est solution de (E).

**3 a)**  $f'(x) = -3 \sin(3x) - 3\sqrt{3} \cos(3x)$ ;

$f''(x) = -9 \cos(3x) + 9\sqrt{3} \sin(3x)$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$f''(x) + 9f(x) = -9 \cos(3x) + 9\sqrt{3} \sin(3x) + 9(\cos(3x) - \sqrt{3} \sin(3x)) = 0$$

donc  $f$  est solution de (E).

**b)**  $f'(x) = -15\sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ ;

$$f''(x) = -75\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$f''(x) + 25f(x) = -75\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 25\left(3\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

donc  $f$  est solution de (E).

**4 a)**  $f'(t) = -2 \sin(2t)$ ; Pour tout réel  $t$ :

$$4(f(t))^2 + 2f'(t) = 4 \cos^2(2t) + 2(-2 \sin(2t)) = 4(\cos^2(2t) - \sin(2t))$$

Or  $4(\cos^2(2t) - \sin(2t))$  n'est pas égal à 4 pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  (on le voit par exemple avec  $t = \frac{\pi}{4}$ )

donc  $f$  n'est pas solution de (E).

**b)**  $f'(t) = -\cos t + t \sin t$ ;

$$f''(t) = \sin t + \sin t + t \cos t = 2 \sin t + t \cos t.$$

Pour tout réel  $t$ ,

$$f''(t) + f(t) = 2 \sin t + t \cos t + (-t \cos t) = 2 \sin t$$

donc  $f$  est solution de (E).

**5 a)**  $f'(t) = e^t(1 + t)$ . Pour tout réel  $t$ ,

$$f'(t) - f(t) = e^t(1 + t) - te^t = e^t$$

donc  $f$  est solution de (E).

**b)**  $f'(t) = 2t \cos t - t^2 \sin t$ . Pour tout réel  $t$ ,

$$2f(t) - t f'(t) = 2t^2 \cos t - t(2t \cos t - t^2 \sin t) = t^3 \sin t$$

donc  $f$  est solution de (E).

**6 a)** Pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $1 + f(x)^2 > 0$ .  
Donc si  $f$  est une solution de (E),  $f'(x) > 0$  sur  $I$   
et  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

**b)** La courbe représentative de  $f$  admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si il existe un réel  $x$  tel que  $f'(x) = 0$ . D'après la question précédente, ce n'est pas le cas.

**8 a)** Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + k$ , où  $k$  est une constante réelle.

**b)** Les primitives de  $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $t \mapsto \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + k$  où  $k$  est une constante réelle. Les solutions sont donc les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + kt + m$ , où  $m$  est une constante réelle.

**10 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{7x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**11 a)**  $y = 5y' \Leftrightarrow y' - \frac{1}{5}y = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{\frac{1}{5}x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^x$ , où  $C$  est une constante réelle.

**12 a)**  $-2y = 3y' \Leftrightarrow y' + \frac{2}{3}y = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $4y - 2y' = 0 \Leftrightarrow y' - 2y = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{2x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**13 a)**  $3\theta' - 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta' - \frac{2}{3}\theta = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{\frac{2}{3}t}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $\theta' + (\ln 100)\theta = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-t \ln 100}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**14 a)**  $2x' = x \Leftrightarrow x' - \frac{1}{2}x = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}t}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $x' - x = 3x' + x \Leftrightarrow x' + x = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-t}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**c)**  $mx' + nx = 0 \Leftrightarrow x' + \frac{n}{m}x = 0$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-\frac{n}{m}t}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**16 1.** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-ax}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**2. a)**  $f(0) = 1$ ; or  $f$  est une solution de (E) donc  $Ce^0 = 1$  soit  $C = 1$  et  $f(x) = e^{-ax}$ .

**b)**  $f'(x) = -ae^{-ax}$ .

**3.**  $f'(0) = 0,5$ ; donc  $-a = 0,5$  soit  $a = -0,5$  et  $f(x) = e^{0,5x}$ .

**18 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x} + 2$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{\frac{1}{4}x} - 4$ , où  $C$  est une constante réelle.

**19 a)**  $y' = -4y + 2 \Leftrightarrow y' + 4y = 2$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-4x} + \frac{1}{2}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $5y' - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{3}{5}y = \frac{2}{5}$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{\frac{3}{5}x} - \frac{2}{3}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**20 a)**  $-2y' + 1 = -3y \Leftrightarrow y' - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $-3y' - 6y = -5 \Leftrightarrow y' + 2y = \frac{5}{3}$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{5}{6}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**21 a)**  $y' + \sqrt{5}y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' + \sqrt{5}y = 1$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-x\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $-y' + 6y + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y' - 6y = \sqrt{3}$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{6x} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**22 a)**  $5y' = 3y - 4 \Leftrightarrow y' - \frac{3}{5}y = -\frac{4}{5}$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{\frac{3}{5}x} + \frac{4}{3}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $-3y' = 6y - 5 \Leftrightarrow y' + 2y = \frac{5}{3}$ . Les solutions

sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{5}{6}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**23 1.** Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-t} + b$ , où  $C$  est une constante réelle.

**2. a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 5$ .

**b)** Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = b$  donc  $b = 5$

donc  $f(t) = Ce^{-t} + 5$ .

**3. a)**  $f(0) = 8$ .

**b)** Or  $f(0) = C + 5$  donc  $C + 5 = 8$  soit  $C = 3$ .

On a alors  $f(t) = 3e^{-t} + 5$ .

**25** Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-3x} - \frac{5}{3}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**a)** Or  $f(\ln 2) = Ce^{-3\ln 2} - \frac{5}{3} = \frac{1}{8}C - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

donc  $C = 24$  et  $f(x) = 24e^{-3x} - \frac{5}{3}$ .

**b)** Or  $g(0) = C - \frac{5}{3} = -5$

donc  $C = -\frac{10}{3}$  et  $g(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{5}{3}$ .

**26**  $2y' - 4y = 0 \Leftrightarrow y' - 2y = 0$ . Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{2x}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**a)** Or  $f(1) = Ce^2 = -e$

donc  $C = -\frac{1}{e}$  et  $f(x) = -\frac{1}{e}e^{2x} = -e^{2x-1}$ .

**b)** Or  $g(\ln 3) = Ce^{2\ln 3} = 9C = 0$

donc  $C = 0$  et  $g(x) = 0$ .

**27**  $-6y' - 18y = -9 \Leftrightarrow y' + 3y = \frac{3}{2}$ .

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{1}{2}$ , où  $C$  est une constante réelle.

**a)** Or  $f(\ln 3) = Ce^{-3\ln 3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{27}C + \frac{1}{2} = 1$

donc  $C = \frac{27}{2}$  et  $f(x) = \frac{27}{2}e^{-3x} + \frac{1}{2}$ .

**b)** Or  $g(-2) = Ce^6 + \frac{1}{2} = 0$  donc  $C = -\frac{1}{2e^6}$

et  $g(x) = -\frac{1}{2e^6}e^{-3x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-3x-6})$ .

**28**  $4y' = y - 8 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{4}y = -2$ .

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$x \mapsto Ce^{\frac{1}{4}x} + 8$ , où  $C$  est une constante réelle.

**a)** Or  $f(0) = C + 8 = 1$

donc  $C = -7$  et  $f(x) = -7e^{\frac{1}{4}x} + 8$ .

**b)** Or  $g(1) = Ce^{\frac{1}{4}} + 8 = 8$

donc  $C = 0$  et  $g(x) = 8$ .

**30**  $5y' + 3 = -10y \Leftrightarrow y' + 2y = -\frac{3}{5}$ .

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$x \mapsto Ce^{-2x} - \frac{3}{10}$ , où  $C$  est une constante réelle.

Or  $f(\ln 5) = Ce^{-2\ln 5} - \frac{3}{10} = \frac{C}{25} - \frac{3}{10} = -1$

donc  $C = -\frac{35}{2}$  et  $f(x) = -\frac{35}{2}e^{-2x} - \frac{3}{10}$ .

**31**  $\theta - 2\theta' = 1 \Leftrightarrow \theta' - \frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{2}$ .

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}t} + 1$ , où  $C$  est une constante réelle.

Or  $\theta(0) = C + 1 = \sqrt{3}$  donc  $C = \sqrt{3} - 1$

et  $\theta(t) = (\sqrt{3} - 1)e^{\frac{1}{2}t} + 1$ .

**32** Les solutions sont les fonctions de la forme

$x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + 2b$ , où  $C$  est une constante réelle.

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2b = -1$

donc  $b = -\frac{1}{2}$  et  $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} - 1$ .

De plus,  $f(0) = C - 1 = 3$

donc  $C = 4$  et  $f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x} - 1$ .

**33 1. a)** Il semble que les solutions de (E) aient toutes 2 pour limite commune en  $+\infty$ .

**b)** Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-0,2x} + 2$ , où  $C$  est une constante réelle.

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-0,2x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

Ce résultat confirme la conjecture faite au **a**).

**2.** Fonction  $f$  représentée par la courbe rouge :  $f(0) = C + 2 = 5$  donc  $C = 3$  et  $f(x) = 3e^{-0,2x} + 2$ .

Fonction  $g$  représentée par la courbe bleue :  
 $g(0) = C + 2 = 4$  donc  $C = 2$  et  $g(x) = 2e^{-0,2x} + 2$ .  
 Fonction  $h$  représentée par la courbe verte :  
 $h(0) = C + 2 = 1$   
 donc  $C = -1$  et  $h(x) = -e^{-0,2x} + 2$ .

**34 1. a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ , où  $C$  est une constante réelle.

$$\text{Or } f(0) = C + \frac{1}{2} = 3$$

$$\text{donc } C = \frac{5}{2} \text{ et } f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

**b)**  $g = f$ .

**c)** Ces deux fonctions sont égales. C'est la conséquence du théorème du cours sur l'unicité d'une solution d'une équation différentielle du premier ordre satisfaisant à une condition initiale.

**2. a)** La courbe verte coupe deux autres courbes donc la fonction représentée par la courbe verte n'est pas solution de la même équation différentielle que celles représentées par les courbes bleue et jaune. La courbe verte est donc celle de  $i$ , solution de  $(E_2)$ , et les trois autres celles de solutions  $f, g, h$  de  $(E_1)$ .

**b)** Les solutions de  $(E_1)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{m}{2}$ , où  $C$  est une constante réelle.

Les solutions de  $(E_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C'e^{-x} + n$ , où  $C'$  est une constante réelle.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = -4. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-x} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{m}{2} = -4$$

d'où  $m = -8$ .

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = n = -4.$$

**d)** En prenant  $f$  pour la courbe bleue,

$$f(0) = C - 4 = 1 \text{ donc } C = 5 \text{ et } f(x) = 5e^{-2x} - 4.$$

En prenant  $g$  pour la courbe jaune,

$$g(0) = C - 4 = -3 \text{ donc } C = 1 \text{ et } g(x) = e^{-2x} - 4.$$

En prenant  $h$  pour la courbe rouge,

$$h(0) = C - 4 = -6 \text{ donc } C = -2$$

$$\text{et } h(x) = -2e^{-2x} - 4.$$

La courbe verte représente  $i$ ;  $i(0) = C - 4 = -3$  donc  $C = 1$  et  $i(x) = e^{-x} - 4$ .

**36 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{b) } 4y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{9}{4}y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{37 a) } y'' = -2y \Leftrightarrow y'' + 2y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**b)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{38 a) } 3y'' + 2y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{3}y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{b) } 4y'' = -16y \Leftrightarrow y'' + 4y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**39 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{b) } 4y'' = -y \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{4}y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**40 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{b) } 9x'' + 25x = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{25}{9}x = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{5}{3}t\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.



**41 a)**  $2x'' + x = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{1}{2}x = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**b)**  $x'' = -\frac{1}{4}x \Leftrightarrow x'' + \frac{1}{4}x = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**43** Cette solution est  $4\pi$ -périodique.

Or  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$ , d'où  $\omega = \frac{1}{2}$ .

**45**  $9y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{9}y = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$f(0) = C_1 = 2$  ;

$f'(x) = -\frac{1}{3}C_1 \sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}C_2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

donc  $f'(0) = \frac{1}{3}C_2 = 1$  soit  $C_2 = 3$ .

Alors  $f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 3 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ .

**46** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 = 1$  donc  $C_1 = -1$  ;

$f'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$

donc  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2C_2 = -2$  soit  $C_2 = 1$ .

Alors  $f(x) = -\cos(2x) + \sin(2x)$ .

**47**  $4y'' + 49y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{49}{4}y = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{7}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$f'(x) = -\frac{7}{2}C_1 \sin\left(\frac{7}{2}x\right) + \frac{7}{2}C_2 \cos\left(\frac{7}{2}x\right)$  ;

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{2}C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

donc  $C_1 + C_2 = 0$  et  $f(0) = C_1 = -\sqrt{2}$ .

D'où  $C_2 = -C_1 = \sqrt{2}$ .

Alors  $f(x) = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ .

**48 1.**  $4y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{4}y = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

**2. a)**  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0,5$ .

**b)**  $f(0) = C_1 = 1$  ;

$f'(x) = -\frac{1}{2}C_1 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}C_2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

donc  $f'(0) = 0,5C_2 = 0,5$

soit  $C_2 = 1$ .

On a bien  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

**50** Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

Or  $f$  est 2-périodique donc  $\omega = \pi$

et  $f(t) = C_1 \cos(\pi t) + C_2 \sin(\pi t)$ .

Par lecture graphique on a  $f(0) = 1$

et  $f'(0) = -2\pi$ .

De plus,  $f(0) = C_1 = 1$  ;

$f'(t) = -\pi \sin(\pi t) + \pi C_2 \cos(\pi t)$

donc  $f'(0) = \pi C_2 = -2\pi$

soit  $C_2 = -2$ .

On a donc  $f(t) = \cos(\pi t) - 2 \sin(\pi t)$ .

**51 1. 2.**  ch7\_ex51

**3.** La fonction  $h$  n'est pas modifiée lorsque  $A$  et  $\varphi$  varient.

**4.** Lorsque  $\omega$  est fixé, la fonction  $h$  n'est pas modifiée lorsque  $A$  et  $\varphi$  varient.

Il semble que  $B = \omega^2$ .

**5. a)**  $f'(x) = -A\omega \sin(\omega x + \varphi)$

et  $f''(x) = -A\omega^2 \cos(\omega x + \varphi) = -\omega^2 f(x)$ .

**b)**  $f$  est solution de l'équation différentielle

$y'' + \omega^2 y = 0$ . Il est donc normal, lorsque  $B = \omega^2$ , d'avoir  $f''(x) + Bf(x) = 0$ .

**52** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.



Or  $f(0) = C_1 = 1$  (ordonnée à l'origine de la tangente);

D'autre part

$$f'(x) = -\sqrt{2}C_1 \sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}C_2 \cos(\sqrt{2}x)$$

donc  $f'(0) = \sqrt{2}C_2 = 2$  (coefficient directeur de la tangente) soit  $C_2 = \sqrt{2}$ .

$$\text{Alors } f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x).$$

**54 a)**  $9y'' + 16y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{16}{9}y = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme

$x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{Or } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = \sqrt{3}$$

$$\text{et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0.$$

On en déduit que  $C_2 = 1$  et  $C_1 = \sqrt{3}$ .

$$\text{Alors } f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sin\left(\frac{4}{3}x\right).$$

**b)** Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) &= 2 \left( \cos\left(\frac{4}{3}x\right) \cos \frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \right) \\ &= \sqrt{3} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sin\left(\frac{4}{3}x\right) = f(x). \end{aligned}$$

**55 a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes réelles.

$$\text{Or } f(0) = C_1 = \sqrt{2};$$

$$f'(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)$$

$$\text{donc } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3C_2 = 3\sqrt{2} \text{ donc } C_2 = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Alors } f(x) = \sqrt{2} \cos(3x) - \sqrt{2} \sin(3x).$$

**b)** Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) &= 2 \left( \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) - \sin(3x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x) \right) = f(x). \end{aligned}$$

**59 1. a)** Les solutions de  $(E_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^x - 1$  où  $C$  est une constante réelle.

**b)** Pour tout réel  $x$ ,  $u'(x) = Ce^x - e^x - xe^x$ ;

$$\text{donc } u'(x) - u(x)$$

$$= Ce^x - e^x - xe^x - Ce^x + e^x + 1 = 1 - e^x.$$

Donc  $u$  est solution de  $(E_1)$ .

$$\text{c) } u(0) = C - 1 = 2$$

$$\text{donc } C = 3 \text{ et } u(x) = 3e^x - xe^x - 1.$$

**2. a)** On prend pour valeur approchée de l'aire de la surface bleue le trapèze dont les sommets ont pour coordonnées  $(0; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(2; 7)$  et  $(2; 0)$ . Ce trapèze a pour aire:  $2(2+7)/2 = 9$  u. a (*Il s'agit ici d'une valeur approchée par excès, on peut aussi remplacer le point de coordonnées  $(2; 7)$  par celui de coordonnées  $(2; 6)$  et on obtient 8 comme valeur approchée par défaut.*)

**b)**  $f'(x) = (2-x)e^x$ . Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $2-x$ . D'où le tableau de variation suivant:

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$			

**c)**  $f(0) = 2$  et  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$  donc  $f$  est positive sur  $[0; 2]$ .

**d)**  $F'(x) = 4e^x - e^x - x e^x - 1 = 3e^x - x e^x - 1 = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**e)** Cette aire est égale à:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) \\ &= 2e^2 - 2 - 4 = 2e^2 - 6 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

À  $10^{-2}$  près, on a 8,78 u.a.; la valeur approchée de la question **2. a)** est relativement proche de cette valeur.

**60 1.**  $9y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{9}y = 0$ .

Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**2. a)**  $f(0) = C_1 = \frac{1}{2}$ ;

$$f'(x) = -C_1 \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}C_2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

donc  $f'(0) = \frac{1}{3}C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$  ; d'où  $C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

On a alors  $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ .

**b)** Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) &= \sin \frac{x}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{5\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3} = f(x). \end{aligned}$$

**3. a)** D'après la formule de duplication appliquée

à  $\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}$ , on a :

$$\cos\left(2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ soit}$$

$$\cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ ou encore}$$

$$\sin^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

De plus,  $\sin^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = f^2(x)$  d'où le résultat.

$$\begin{aligned} \text{b) } E^2 &= \frac{1}{6\pi} \int_0^{6\pi} (f(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_0^{6\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{12\pi} \left[ x + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) \right]_0^{6\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où  $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**61 1.**  $4y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{9}{4}y = 0$ .

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$t \mapsto C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

$f(0) = C_1 = 1$  ;

$$f'(t) = -\frac{3}{2}C_1 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}C_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right)$$

donc  $f'(0) = \frac{3}{2}C_2 = -\frac{3}{2}$  d'où  $C_2 = -1$ .

On a alors  $f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{3}{2}t\right)$ .

**2. a)**  $g'(t) = -A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

et  $g''(t) = -A\omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**b)**  $g''(t) = -\omega^2 g(t) \Leftrightarrow g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$ .

Pour que  $g$  soit solution de (E), il suffit de prendre

$\omega^2 = \frac{9}{4}$  donc de choisir  $\omega = \frac{3}{2}$ .

**c)**  $g(0) = A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{A\sqrt{2}}{2} = 1$  donc  $A = \sqrt{2}$ .

On a donc  $g(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**d)**  $g'(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$  donc

$$g'(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{2}.$$

**e)**  $f$  et  $g$  sont deux solutions de (E), équation différentielle du second ordre, vérifiant deux conditions initiales en 0 identiques donc elles sont égales et on a bien, que pour tout  $t$  réel,  $f(t) = g(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{3. } \mu &= \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(t) dt = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \left[ \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

**62 a)** Les solutions de (E<sub>2</sub>) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**b)**  $u'(x) = \frac{1}{4}$  et  $u''(x) = 0$  donc, pour tout  $x$  de

$\mathbb{R}$ ,  $u''(x) + 16u(x) = 16 \times \frac{1}{4}x = 4x$  donc  $u$  est solution de (E<sub>1</sub>).

**c)**  $\varphi_0$  est de la forme

$$\varphi_0(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + 4x$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

$\varphi_0(0) = C_1 = 0$  ;

$\varphi_0'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x) + 4$

donc  $\varphi_0'(0) = 4C_2 + 4 = \frac{5}{4}$  d'où  $C_2 = -\frac{11}{16}$ .

On a alors  $\varphi_0(x) = -\frac{11}{16} \sin(4x) + 4x$ .

**63 1. a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**b)**  $f(0) = C_1 = 1$ . Les solutions vérifiant  $f(0) = 1$  sont de la forme  $x \mapsto \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$  où  $C_2$  est une constante réelle.

**c)** Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} & \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + C_2 \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \cos(3x + 2\pi) + C_2 \sin(3x + 2\pi) \\ &= \cos(3x) + C_2 \sin(3x) \end{aligned}$$

car les fonctions cosinus et sinus sont  $2\pi$ -périodiques donc ces fonctions sont

$\frac{2\pi}{3}$ -périodiques.

*Remarque : on peut aussi utiliser les connaissances du cours de Première : les fonctions  $x \mapsto \cos(3x)$  et  $x \mapsto \sin(3x)$  sont  $\frac{2\pi}{3}$ -périodiques, donc c'est aussi le cas de la fonction  $f$ .*

**2. a)**  ch7\_ex63.ggb

**b)** Il semble que pour  $C \approx 3$ , la valeur moyenne de  $f$  sur une demi-période soit égale à 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad m &= \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(3x) + C \sin(3x)) dx \\ &= \frac{3}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{3} C \cos(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2C}{\pi} \end{aligned}$$

On a donc :  $m = 2$  si et seulement si  $\frac{2C}{\pi} = 2$  soit

$C = \pi$ . Il existe donc une unique valeur de  $C$ , proche de 3 (arrondi à l'unité près), pour laquelle la condition sur la valeur moyenne est vérifiée, ce qui confirme la conjecture émise.

**64 A 1.** Les solutions de  $(E_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-2x}$  où  $C$  est une constante réelle.

**2.** Pour tout réel  $x$ ,  $u'(x) = \frac{1}{2}$ ,

donc  $u'(x) + 2u(x) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = x$  donc  $u$  est une solution de l'équation différentielle  $(E_1)$ .

**3.**  $\varphi_0$  est de la forme  $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$  où  $C$  est un nombre réel quelconque.

$\varphi_0(0) = -\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4}$  donc  $C = 1$ . On a alors

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}.$$

**B 1. a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**b)** En développant, on a

$$e^{-2x} \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + 1\right) = f(x).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}xe^{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{4}e^{2x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

**2. a)**  $f'(x) = \frac{1}{2} - 2e^{-2x}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad \frac{1}{2} - 2e^{-2x} &\geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow -2x \leq -\ln 4 \\ &\Leftrightarrow x \geq \ln 2; \end{aligned}$$

on en déduit le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$

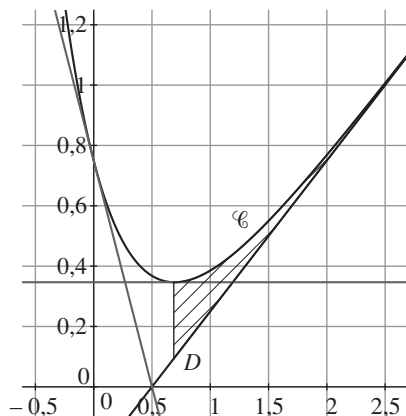
**c)** Le coefficient directeur de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  en son point d'abscisse 0 vaut

$$f'(0) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

**3.** On étudie le signe de  $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = e^{-2x}$ .

Or, pour tout réel  $x$ ,  $e^{-2x} > 0$  donc  $C$  est au-dessus de  $D$ .

**4.** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**C 1. a)** Voir figure.

**b)**  $C$  est au-dessus de  $D$  d'après la question 3. de la partie B et  $1 \text{ u.a.} = 4 \times 10 = 40 \text{ cm}^2$ , on a donc

$$\begin{aligned} A(m) &= 40 \int_{\ln 2}^m \left( f(x) - \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right) dx \\ &= 40 \int_{\ln 2}^m e^{-2x} dx = 40 \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{\ln 2}^m \\ &= 40 \left( -\frac{1}{2} e^{-2m} + \frac{1}{2} e^{-2 \ln 2} \right) = -20e^{-2m} + 5 \end{aligned}$$

**2.**  $\lim_{m \rightarrow +\infty} (-20e^{-2m}) = 0$  donc  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A(m) = 5$ .

L'aire de la partie de plan limitée par  $C$ ,  $D$  et la droite d'équation  $x = \ln 2$  est égale à  $5 \text{ cm}^2$ .

**65 1.**  $y' = 2 - y \Leftrightarrow y' + y = 2$ . Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-x} + 2$  où  $C$  est une constante réelle.

**2. a)**  ch7\_pb65.ggb

**b)** Il semble que toutes les tangentes au point d'abscisse 0 des courbes représentatives des solutions de (E) passent par le point de coordonnées  $(1; 2)$ .

**3. a)**  $f$  est une solution de (E) donc elle est de la forme  $x \mapsto Ce^{-x} + 2$  où  $C$  est une constante réelle.

Si  $f(0) = c$ , alors  $C + 2 = c$  soit  $C = c - 2$  et  $f(x) = (c - 2)e^{-x} + 2$ .

Alors,  $f'(x) = -(c - 2)e^{-x}$  donc  $f'(0) = 2 - c$ .

*Remarque : On peut guider ici les élèves vers une autre méthode : si  $f'(x) = 2 - f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , cette égalité est en particulier vraie pour  $x = 0$  et on a  $f'(0) = 2 - f(0)$ , donc  $f'(0) = 2 - c$ .*

**b)** Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 est  $y = f'(0)x + f(0)$ , soit  $y = (2 - c)x + c$ .

**c)** On vérifie que le point de coordonnées  $(1; 2)$  est sur la tangente en remplaçant  $x$  par 1 dans l'équation :  $(2 - c)1 + c = 2$  donc ce point est sur la tangente.

**66** On a  $f(0) = 1$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) - 2f(x) = 4x + 1$ , donc en particulier :  $f'(0) - 2f(0) = 4 \times 0 + 1 = 1$  donc  $f'(0) = 3$ .

**67 1.** Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  et

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

On a bien, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$4f''(x) = -2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -f(x).$$

Donc  $f$  est une solution de l'équation différentielle (E).

**2. a)**  $4y'' = -y \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{4}y = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**b)**  $g(0) = C_1 = 1$ ;

$$g'(x) = -\frac{1}{2}C_1 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}C_2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ donc}$$

$$g'(0) = \frac{1}{2}C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ soit } C_2 = -\sqrt{3}.$$

$$\text{On a alors } g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

**c)** Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} \right) = g(x). \end{aligned}$$

*Remarque : on peut aussi vérifier que  $f(0) = 1$*

*et que  $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  puis utiliser l'unicité de la solution de (E) vérifiant ces deux conditions.*

**3. a)** Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= 4 \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \left( \frac{1}{2} \left( \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1 \right) \right) \\ &= 2 \left( \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1 \right). \end{aligned}$$

**b)**  $E^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} (f(x))^2 dx$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ 2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2x \right]_0^{4\pi} = 2$$

donc  $E = \sqrt{2}$ .

**68 1. a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-x}$  où  $C$  est une constante réelle.

**b)** Si  $f(0) = 1$  alors  $C = 1$  d'où le résultat.

**2. a)**  $m = \frac{1}{3-2} \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 e^{-x} dx$

$$= [-e^{-x}]_2^3 = e^{-2} - e^{-3}.$$

$$\text{b) } m_n = \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} e^{-x} dx \\ = [-e^{-x}]_n^{n+1} = e^{-n} - e^{-n+1}.$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = (1 - e^{-1})e^{-(n+1)} = (1 - e^{-1})e^{-n} \times e^{-1} \\ = u_n \times e^{-1},$$

donc  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $e^{-1}$  et de premier terme  $u_0 = 1 - e^{-1}$ .

**69** **A** 1.  $Q$  est une solution de l'équation différentielle  $y' - ay = 0$  dont les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{at}$  où  $C$  est une constante réelle. De plus,  $Q(0) = 5$  donc  $C = 5$  et  $Q(t) = 5e^{at}$ .

$$2. Q(120) = 2,5$$

$$\text{donc } 5e^{120a} = 2,5 \Leftrightarrow a = -\frac{\ln 2}{120}.$$

$$\text{D'où } Q(t) = 5e^{-\frac{\ln 2}{120}t}.$$

3. On doit résoudre l'inéquation  $Q(t) < 1$ . Or  $5e^{-\frac{t \ln 2}{120}} < 1 \Leftrightarrow t > \frac{120 \ln 5}{\ln 2}$

soit  $t \approx 279$  min soit 4 h 39 min.

**B** 1. a) Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-kt} + \frac{A}{k}$  où  $C$  est une constante réelle.

$$\text{b) } Q(0) = C + \frac{A}{k} = 0 \text{ donc } C = -\frac{A}{k}.$$

$$\text{Alors } Q(t) = -\frac{A}{k}e^{-kt} + \frac{A}{k} = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$2. \text{ a) } \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \frac{A}{k}.$$

$$\text{b) } Q(180) = \frac{A}{2k}$$

$$\text{soit } \frac{A}{k}(1 - e^{-180k}) = \frac{A}{2k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{180}.$$

c) On résout :

$$\frac{A}{k} = 80 \Leftrightarrow \frac{180A}{\ln 2} = 80 \Leftrightarrow A = \frac{4 \ln 2}{9}.$$

$$\text{70 } 1. \text{ a) } Y'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2}.$$

b) Pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$Y'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{-(2N(t) - 0,0045(N(t))^2)}{(N(t))^2}$$

$$= -\frac{2}{N(t)} + 0,0045 = -2Y(t) + 0,0045.$$

Donc  $Y$  est solution de (E).

$$\text{c) } y' = -2y + 0,0045 \Leftrightarrow y' + 2y = 0,0045.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{0,0045}{2}$$

où  $C$  est une constante réelle.

$$\text{d) } N(0) = 10^3 \text{ donc } Y(0) = 10^{-3}.$$

$$\text{Alors } C + \frac{0,0045}{2} = 10^{-3} \Leftrightarrow C = -0,00125 \text{ et}$$

$$Y(t) = -0,00125e^{-2t} + \frac{0,0045}{2}.$$

On a alors, pour  $t \geq 0$  :

$$N(t) = \frac{1}{Y(t)} = \frac{2}{0,0045 - 0,0025e^{-2t}}.$$

$$2. \text{ a) } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{2}{0,0045} = \frac{4000}{9} \approx 444,4$$

à  $10^{-1}$  près.

Le nombre d'individus présents dans l'enceinte tend vers 444,4.

$$\text{b) } N'(t) = -\frac{0,01e^{-2t}}{(0,0045 - 0,0025e^{-2t})^2}.$$

Pour tout réel  $t > 0$ ,  $N'(t) < 0$  d'où le tableau de variation suivant :

$t$	0	$+\infty$
$N'(t)$		-
$N$	$10^3$	$\frac{4000}{9}$

c) On résout l'équation  $N(t) = 500$  soit

$$\frac{2}{0,0045 - 0,0025e^{-2t}} = 500 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \ln 0,2$$

$\approx 0,804$  soit 48 min arrondi à la minute près.

**71** 1.  $ma(t) = f(t)$  soit  $ma(t) - f(t) = 0$ ; or

$$f(t) = -kX(t) \text{ et } a(t) = X''(t)$$

$$\text{donc } mX''(t) + kX(t) = 0.$$

De plus,  $m = 0,03$  kg et  $k = 3 \cdot 10^8$  N/m donc  $0,03X''(t) + 3 \cdot 10^8 X(t) = 0$  soit en divisant par 0,03 :  $X''(t) + 10^{10} X(t) = 0$ .

2. a) Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C_1 \cos(10^5 t) + C_2 \sin(10^5 t)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

$$\text{b) } X_0(0) = C_1 = 10^{-3};$$

$$X'(t) = -10^5 C_1 \sin(10^5 t) + 10^5 C_2 \cos(10^5 t)$$

$$\text{donc } X'_0(0) = 10^5 C_2 = 0 \text{ soit } C_2 = 0.$$

$$\text{On a alors } X_0(t) = 10^{-3} \cos(10^5 t).$$

$$3. \text{ a) } T = \frac{2\pi}{10^5}.$$

b)  $f = \frac{1}{T} = \frac{10^5}{2\pi} \approx 15915$  à l'unité près.

**72 a)** Pour tout réel  $t \geq 0$ , on a :

$u(t) = u_L(t) + u_R(t)$  soit,

$$5 = L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) \Leftrightarrow 5 = 12 \cdot 10^{-3} i'(t) + 9i(t)$$

$$\Leftrightarrow i'(t) + 750i(t) = \frac{5}{12} \times 10^3.$$

La fonction  $i$  vérifie bien l'équation différentielle :

$$y' + 750y = \frac{5}{12} \cdot 10^3.$$

b) Les solutions sont les fonctions de la forme  $t \mapsto Ce^{-750t} + \frac{5}{9}$  où  $C$  est une constante réelle.

c)  $i(0) = C + \frac{5}{9} = 0$  donc  $C = -\frac{5}{9}$  et pour  $t \geq 0$  :

$$i(t) = -\frac{5}{9}e^{-750t} + \frac{5}{9}.$$

d)  $I_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{5}{9}.$

e)  $i'(t) = \frac{1250}{3}e^{-750t}$  donc pour tout  $t \geq 0$ ,

$i'(t) > 0$  d'où le tableau de variation suivant :

$t$	0	$+\infty$
$i'(t)$		+
$i$	0	$\frac{5}{9}$

f)  $i(t_1) = 0,95 I_n \Leftrightarrow -\frac{5}{9}e^{-750t_1} + \frac{5}{9} = 0,95 \times \frac{5}{9}$

$$\Leftrightarrow t_1 = -\frac{\ln 0,05}{750} \approx 0,004 \text{ s.}$$

**73 1. a)**  $u_s(t) = u_C(t) + u_R(t)$  soit

$$E = u_C(t) + Ri(t) = u_C(t) + RC \frac{du_C}{dt}(t).$$

b) Les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto ke^{-\frac{t}{RC}} + E \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

c) Or  $u_C(0) = k + E = 0,2E$  donc  $k = -0,8E$ .

On a alors  $u_C(t) = -0,8Ee^{-\frac{t}{RC}} + E$ .

d)  $u_C'(t) = \frac{0,8}{RC}Ee^{-\frac{t}{RC}}$  donc pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$u_C'(t) > 0$ . La fonction  $t \mapsto -0,8Ee^{-\frac{1}{RC}t} + E$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

e)  $u_C(t_1) = 0,8E \Leftrightarrow -0,8Ee^{-\frac{t_1}{RC}} + E = 0,8E$

$$\Leftrightarrow t_1 = RC \ln 4.$$

**2. a)**  $u_s(t) = u_C(t) + u_R(t)$  soit

$$0 = u_C(t) + Ri(t) = u_C(t) + RC \frac{du_C}{dt}(t).$$

b) Les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto ke^{-\frac{t}{RC}} \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

c) Or  $u_C(t_1) = 0,8E$

$$\Leftrightarrow ke^{-\frac{RC \ln 4}{RC}} = 0,8E \Leftrightarrow k = 3,2E.$$

Donc  $u_C(t) = 3,2Ee^{-\frac{t}{RC}}.$

d)  $u_C'(t) = -\frac{3,2}{RC}Ee^{-\frac{t}{RC}}$  donc pour tout réel

$$t \geq 0, u_C'(t) < 0.$$

La fonction  $u_C$  est strictement décroissante sur  $[RC \ln 4; +\infty[$ .

e)  $u_C(t_2) = 0,2E \Leftrightarrow 3,2Ee^{-\frac{t_2}{RC}} = 0,2E$

$$\Leftrightarrow t_2 = 2RC \ln 4 = 2t_1.$$

**3. a)**  $T = 2RC \ln 4$ .

b)  $T \approx 277$  ns à la nanoseconde près.

## Vers le Bac

**74 1.** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

**2.**  $f(0) = C_1 = \frac{1}{4};$

$$f'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$$

donc  $f'(0) = 2C_2 = 0$  soit  $C_2 = 0$ .

On a alors  $f(x) = \frac{1}{4} \cos(2x).$

**3.**  $g'(x) = 3 \cos x$  et  $g''(x) = -3 \sin x$  donc, pour tout réel  $x$ ,  $g''(x) + g(x) = 0$  et  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ .

**4.**  $h'(x) = 3 \cos x - \frac{1}{2} \sin(2x)$

et  $h''(x) = -3 \sin x - \cos 2x.$

**5. a)** C    **b)** C    **c)** A

**75 1.**  $2y'' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0.$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-\frac{x}{2}} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

2.  $f(0) = C = 2$  donc  $f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ .

3.  $M = \frac{1}{2-0} \int_0^2 2e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[ -2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^2$   
 $= 2 - 2e^{-1} \approx 1,3$

à  $10^{-1}$  près.

4.  $f(1) \neq 0$  donc ce n'est pas la courbe rouge. La valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 2]$  est d'environ 1,3, or la courbe bleue est entièrement située au-dessus de cette valeur, donc la courbe de  $f$  n'est pas la courbe bleue. Il s'agit donc de la courbe verte.

**76 A 1. a)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-0,1x} + 30$  où  $C$  est une constante réelle.

**b)**  $f(0) = C + 30 = 20$  soit  $C = -10$ . On a alors  $f(x) = -10e^{-0,1x} + 30$ .

**B 1. a)** Avant le démarrage du moteur, la température du lubrifiant est  $\theta(0) = 20^\circ\text{C}$ .

**b)** Après 24 heures de fonctionnement du moteur, la température du lubrifiant est  $\theta(24) \approx 29,1^\circ\text{C}$ .

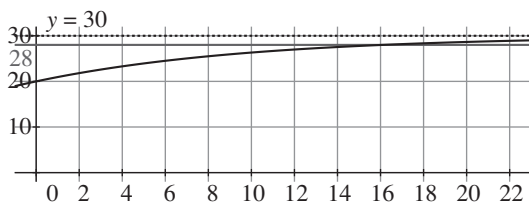
2. **a)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 30$ .

**b)** La courbe représentative de la fonction  $\theta$  admet la droite d'équation  $y = 30$  pour asymptote en  $+\infty$ .

**c)** La température du lubrifiant devient très proche de  $30^\circ\text{C}$  lorsque le temps de fonctionnement du moteur est suffisamment long.

3. **a)**  $\theta'(t) = e^{-0,1t}$ . Pour tout  $t$  de  $[0; +\infty[$ ,  $\theta'(t) > 0$  donc  $\theta$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

**b)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**c)** Graphiquement, il semble que  $t_0 \approx 16$  h.

On résout  $\theta(t_0) = 28 \Leftrightarrow 30 - 10e^{-0,1t_0}$

$$= 28 \Leftrightarrow t_0 = \frac{\ln 5}{0,1},$$

soit 16 h à l'heure près ou 966 min à la minute près.

**d)**  $\Theta = \frac{1}{10-5} \int_5^{10} \theta(t) dt = \frac{1}{5} [30t + 100e^{-0,1t}]_5^{10}$   
 $= 30 + 20(e^{-1} - e^{-0,5}),$

soit  $25,23^\circ\text{C}$  à  $10^{-2}$  près.

**77** Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme  $x \mapsto C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

$f(0) = C_1 = \pi$ ; de plus, la solution représentée a pour période  $\pi$  donc  $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ .

Alors  $f(x) = \pi \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$  ;

$f'(x) = -2\pi \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$  et comme la droite  $(AB)$  a pour coefficient directeur  $-1$ ,

$$f'(0) = -1 \text{ soit } C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Finalement,  $f(x) = \pi \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x)$ .

## 8

## Nombres complexes

## Activités

## Activité 1 Vers une nouvelle forme pour les nombres complexes

Le but de cette activité est de retravailler les connaissances de Première sur les complexes et le produit scalaire afin de préparer la construction des nouvelles notions vues en Terminale. Par ailleurs, on aborde sur un exemple les opérations sous forme trigonométrique (forme trigonométrique du quotient de deux nombres complexes mis sous forme trigonométrique) et une formule d'addition en trigonométrie.

1 a) On a :  $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ . Par ailleurs, si  $\theta$  est un argument de  $z$ , on a :  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $\theta = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près. D'où :  $z = \left[2; \frac{\pi}{3}\right]$ .

b) De même, on a :  $|z'| = \sqrt{2}$ ,  $\arg(z') = \frac{\pi}{4}$  à  $2\pi$  près et  $z' = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

2 On a :  $Z = \frac{z}{z'} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$  donc  $Z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i$ .

3 D'après la question 2., on a :  $|Z| = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{4} + \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4}}$

donc  $|Z| = \sqrt{2}$ . Comme  $\frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ , on a bien :  $|Z| = \frac{|z|}{|z'|}$ .

4 a) D'après la question 2., on a :  $\cos \theta = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ . En multipliant numérateur et dénominateur

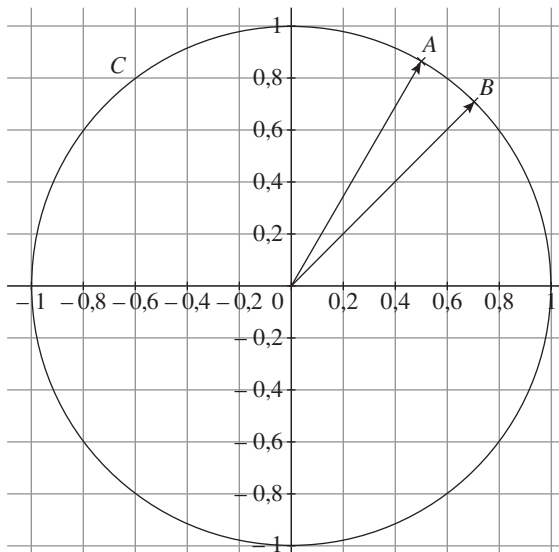
par  $\sqrt{2}$ , on a bien :  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ . Par ailleurs, on a :  $\cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ . En multipliant

numérateur et dénominateur par  $\sqrt{2}$ , on a bien :  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .



**b)** On ne peut pas en déduire immédiatement  $\theta$  car  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  et  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  ne correspondent pas aux lignes trigonométriques d'un angle remarquable « classique ».  
En utilisant la calculatrice, on a pour valeur arrondie à 0,1 près d'un argument de  $Z$ : 0,3.

**5** Figure :



**a)** On a :  $A\left(\cos \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{3}\right)$  donc  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . De même, on a :  $B\left(\cos \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{4}\right)$  donc  $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Si  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  sont deux vecteurs de coordonnées respectives  $(x; y)$  et  $(x'; y')$  alors  $\vec{w} \cdot \vec{w}' = xx' + yy'$ .

On en déduit que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  donc  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .

**b)** Une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$  est  $\frac{\pi}{3}$  et celle de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$  est  $\frac{\pi}{4}$  donc une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$  est  $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

Par ailleurs, si  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  sont deux vecteurs alors  $\vec{w} \cdot \vec{w}' = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{w}'\| \cdot \cos(\vec{w}, \vec{w}')$ . On en déduit que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**c)** En comparant les deux expressions du produit scalaire  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  des deux questions précédentes, on obtient  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .

**d)** Comme  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$  car  $\frac{\pi}{12} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , on déduit de la question **4. b)** qu'un argument de  $Z$  est  $\frac{\pi}{12}$ .

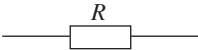


Ce résultat est bien en accord avec la valeur approchée obtenue à la question **4. b)** car  $\frac{\pi}{12} \approx 0,3$ .

Enfin, on a :  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(Z) = \frac{\pi}{12}$  et  $\arg z - \arg z' = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

## Activité 2 Nombres complexes et électricité

Dans cette activité, on montre dans une situation technologique l'intérêt de savoir effectuer le produit et le quotient de deux nombres complexes mis sous forme trigonométrique.

❶ On a :  $\frac{1}{j} = \frac{-j}{j(-j)} = -j$ . En utilisant cette relation, on complète le tableau.

	Impédance $\underline{Z}$		Admittance $\underline{Y}$	
	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme algébrique	Forme trigonométrique
	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = [R; 0]$	$\underline{Y} = \frac{1}{R}$	$\underline{Y} = \left[\frac{1}{R}; 0\right]$
	$\underline{Z} = jL\omega$	$\underline{Z} = \left[L\omega; \frac{\pi}{2}\right]$	$\underline{Y} = -\frac{1}{L\omega}j$	$\underline{Y} = \left[\frac{1}{L\omega}; -\frac{\pi}{2}\right]$
	$\underline{Z} = -\frac{1}{C\omega}j$	$\underline{Z} = \left[\frac{1}{C\omega}; -\frac{\pi}{2}\right]$	$\underline{Y} = jC\omega$	$\underline{Y} = \left[C\omega; \frac{\pi}{2}\right]$

❷ Circuit R-C en parallèle

a) Pour calculer la somme des admittances correspondant à une résistance et une capacité, il semble plus judicieux d'utiliser la forme algébrique des admittances.

b) On a alors :

$$* \underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega ;$$

$$* |\underline{Y}| = \left| \frac{1}{R} + jC\omega \right| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2} ;$$

$$* \sin \theta = \frac{C\omega}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}} .$$

c) De la question précédente, on a :  $\underline{Y} = \left[ \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}; \theta \right]$ . Or  $\underline{Y} = \frac{I}{U}$  donc  $\underline{I} = \underline{YU}$ .

❸ Circuit R-L en série

a) On a :

$$* \underline{Z} = R + jL\omega ;$$

$$* |\underline{Z}| = |R + jL\omega| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} ;$$

$$* \sin \theta = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} .$$

b) De la question précédente, on a :  $\underline{Z} = \left[ \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}; \theta \right]$ . Or  $\underline{Z} = \frac{U}{I}$  donc  $\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}}$ .



## TP 1 En pleine forme exponentielle !

Le but de ce TP est double : donner du sens à la forme exponentielle en l'utilisant dans le cadre des rotations du plan (cela permet aussi de justifier l'intérêt d'une telle forme) et travailler sur les calculs grâce à cette forme exponentielle. Ce TP est l'occasion de voir une application des nombres complexes en géométrie.

**A 1** ch8\_tp1.ggb

On constate que le logiciel utilise le même nom «  $z$  » pour le nombre complexe  $re^{i\theta}$  et pour le point image de ce nombre complexe. Il y a confusion entre un complexe et son point image.

**2 a)** ch8\_tp1.ggb

**b)** On peut conjecturer que le triangle  $OMM_1$  est isocèle et rectangle en  $O$ .

**c) \*** À partir de l'égalité  $z_1 = az$ , on a :  $|z_1| = |a| \cdot |z|$ . Or, par définition de  $a$ , on a  $|a| = 1$  donc  $|z_1| = |z|$ . On en déduit que  $OM_1 = OM$  donc le triangle  $OMM_1$  est isocèle en  $O$ .

\* À partir de l'égalité  $z_1 = az$ , on a :  $\arg z_1 = \arg a + \arg z$  à  $2\pi$  près. Or, par définition de  $a$ , on a

$$\arg a = \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près donc } (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ d'où } (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2}$$

soit  $(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2}$  donc  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2}$  à  $2\pi$  près. On en déduit que le triangle  $OMM_1$  est rectangle en  $O$ .

On a bien confirmé la conjecture de la question **2. b)**.

**d)** D'après la question **2. c)**, la rotation qui transforme  $M$  en  $M_1$  a pour centre  $O$  et pour angle  $\frac{\pi}{2}$ .

**3 a)** ch8\_tp1.ggb

**b)** On peut conjecturer que le triangle  $OMM_1$  est équilatéral.

**c) \*** À partir de l'égalité  $z_1 = az$ , on a :  $|z_1| = |a| \cdot |z|$ . Or, par définition de  $a$ , on a  $|a| = 1$  donc  $|z_1| = |z|$ . On en déduit que  $OM_1 = OM$  donc le triangle  $OMM_1$  est isocèle en  $O$ .

\* À partir de l'égalité  $z_1 = az$ , on a :  $\arg z_1 = \arg a + \arg z$  à  $2\pi$  près. Or, par définition de  $a$ , on a  $\arg a = \frac{\pi}{3}$

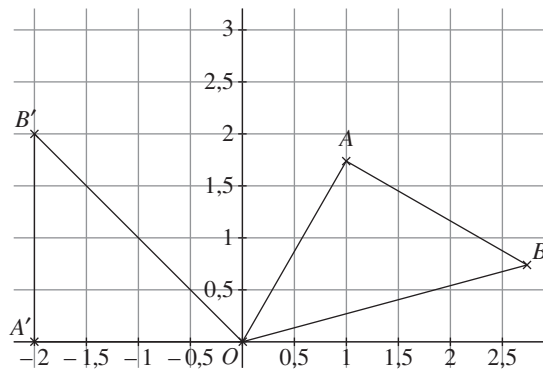
$$\text{à } 2\pi \text{ près donc } (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{3} + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ d'où } (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} \text{ soit } (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{3}$$

donc  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près. On en déduit que le triangle isocèle  $OMM_1$  est équilatéral.

On a bien confirmé la conjecture de la question **3. b)**.

**d)** D'après la question **3. c)**, la rotation qui transforme  $M$  en  $M_1$  a pour centre  $O$  et pour angle  $\frac{\pi}{3}$ .

**B 1 a)** Figure :



**b)** On a immédiatement :  $|z_A| = 2$  et  $\arg z_A = \frac{\pi}{3}$  donc  $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**c)** D'après le théorème de Pythagore, on a :  $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$  soit  $OB = \sqrt{8}$ .  
On en déduit que  $|z_B| = OB = 2\sqrt{2}$ .

**d)** Comme  $OAB$  est isocèle et rectangle en  $A$ , une mesure de  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$  est  $\frac{\pi}{4}$ .

Comme  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ , une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$  est  $\arg z_A - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

On en conclut que  $\arg z_B = \frac{\pi}{12}$  à  $2\pi$  près.

**e)** À l'aide des deux questions précédentes, on a donc  $z_B = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$ .

On en déduit que les coordonnées de  $B$  sont  $\left(2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}; 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}\right)$ . On ne peut pas en donner une autre écriture exacte puisqu'on ne connaît pas la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

**2 a)** Voir figure précédente.

On a alors :  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$  à  $2\pi$  près et  $OA' = OA = 2$ . On en déduit que  $z_{A'} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$ .

**b)** Par rotation, le triangle  $OA'B'$  est rectangle et isocèle en  $A'$ , l'angle  $(\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'B'})$  ayant pour mesure  $+\frac{\pi}{2}$ . On en déduit que les abscisses de  $A'$  et  $B'$  sont les mêmes et que l'ordonnée de  $B'$  est  $A'B' = 2$  donc  $z_{B'} = -2 + 2i$ .

**c)** On a :  $|z_{B'}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  donc  $|z_{B'}| = |z_B|$ . Par ailleurs, en utilisant  $z_{B'} = -2 + 2i$ , on a :  $\arg z_{B'} = \frac{3\pi}{4}$  à  $2\pi$  près et  $\arg \left(z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \arg z_B + \arg e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$  à  $2\pi$  près donc  $\arg \left(z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \arg z_{B'}$ . On en déduit que  $z_{B'} = z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**d)** On déduit de l'égalité précédente que  $z_B = z_{B'} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ . En effectuant le calcul sous forme algébrique, on a alors :  $z_B = (-2 + 2i) \left( \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = (-2 + 2i) \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (1 + \sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$ .  
On en déduit que les coordonnées exactes de  $B$  sont  $(1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$ .

## TP 2 Les nombres complexes dans un appartement

Dans ce TP, on illustre l'intérêt des nombres complexes pour étudier des situations issues du domaine de l'électricité en lien avec le développement durable qui caractérise la nouvelle filière STI2D. C'est aussi l'occasion de travailler sur les différentes écritures et la représentation géométrique d'un nombre complexe.

**A 1** On a :  $\underline{I} = \left[1; -\frac{\pi}{6}\right]$ .

**2** On en déduit que  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{[230; 0]}{\left[1; -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[230; \frac{\pi}{6}\right]$  donc  $\underline{Z} = 230e^{i\frac{\pi}{6}}$  soit encore  $\underline{Z} = 115\sqrt{3} + 115j$ .

**3** On a donc  $R + jL\omega = 115\sqrt{3} + 115j$  donc  $R = 115\sqrt{3} \approx 199,19 \Omega$  et  $314L = 115$  soit  $L = 0,37H$ .

**B 1 a)** L'intensité du courant consommé par les cinq ampoules est en avance de  $24^\circ = \frac{2\pi}{15}$  rad sur la tension donc le déphasage pour cette intensité est  $\frac{2\pi}{15}$ . L'intensité du courant consommé par le réfrigérateur est en retard de  $40^\circ = \frac{2\pi}{9}$  rad sur la tension donc le déphasage pour cette intensité est  $-\frac{2\pi}{9}$ .

**b)** On déduit de **a)** que  $\underline{I}_1 = \left[0,3; \frac{2\pi}{15}\right] = 0,3e^{i\frac{2\pi}{15}}$  et  $\underline{I}_2 = \left[0,48; -\frac{2\pi}{9}\right] = 0,48e^{-i\frac{2\pi}{9}}$ .

**c)** On a :  $\underline{P}_1 = \underline{U} \times \underline{I}_1 = 230 \times 0,3e^{i\frac{2\pi}{15}} = 69e^{i\frac{2\pi}{15}}$  donc  $P_1 = 69 \cos \frac{2\pi}{15} \approx 63,03W$ . De même, on a :

$$P_2 = 110,4 \cos \left(-\frac{2\pi}{9}\right) \approx 84,57W.$$

**2 a)** De même, on a :  $\underline{I}_A = \left[0,06n; \frac{2\pi}{15}\right] = 0,06ne^{i\frac{2\pi}{15}}$ .

**b)**  ch8\_tp2.ggb

L'affixe du vecteur  $\vec{w} = \overline{OI_1} + \overline{OI_2}$  est  $\underline{I}_T$ .

**c)** On a :  $n = 13$ .

**d)** On déduit alors des coordonnées du vecteur  $\vec{w}$  apparaissant dans la fenêtre graphique que  $\underline{I}_T = 1,08 + 0,009j$ .

**e)** On a donc  $R + jL\omega = 1,08 + 0,009j$  donc  $R = 1,08 \Omega$  et  $314L = 0,009$  soit  $L = 0H$  à  $0,01$  près.

## Exercices

**1 a)**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **b)**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **c)**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**d)**  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **e)** 0. **f)**  $\frac{1}{2}$ .

**g)**  $-\frac{1}{2}$ . **h)** -1. **i)** 1. **j)** 0.

**2 a)**  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ . **b)**  $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ . **c)**  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ .

**3 a)**  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . **b)**  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ . **c)**  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

**4 a)**  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ . **b)**  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . **c)**  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

**5 a)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$   
 $= 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 5.$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sqrt{2} \times 3 \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 5 \times 7 \times \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

**6 a)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-2) + (-5) \times (-3) = 13$   
donc, comme le produit scalaire est non nul,  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

**b)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 1 \times (-6) = 0$  donc, comme le  
produit scalaire est nul,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

**c)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$   
donc, comme le produit scalaire est non nul,  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

**8** On a :

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**10** En utilisant les formules d'addition, on obtient :

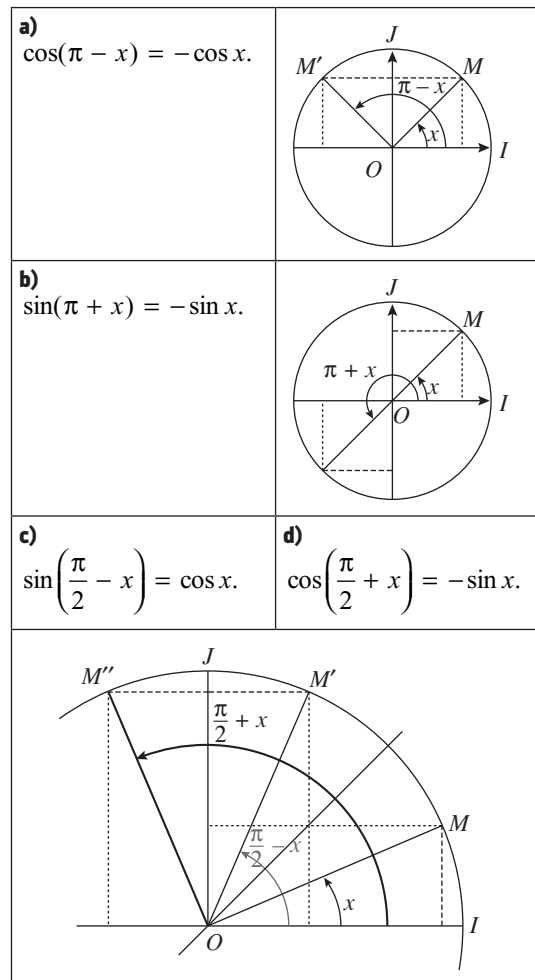
$$\text{a) } \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x.$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -3 \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) &= -3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -\cos\left(-\frac{5\pi}{6} - x\right) &= -\cos\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) \\ &= -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}$$

**11** 1. En utilisant le cercle trigonométrique, on a :



**2.** On retrouve ces résultats avec les formules d'addition :

$$\text{a) } \cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = -\cos x.$$

$$\text{b) } \sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \sin x \cos \pi = -\sin x.$$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \sin x = \cos x.$$

$$\text{d) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \sin \frac{\pi}{2} \sin x = -\sin x.$$

**12 a)** On a :  $\cos(-b) = \cos b$  et  $\sin(-b) = -\sin b$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) \\ &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b.\end{aligned}$$

**b)** On a :  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$  et

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \text{ On a alors :}$$

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b\end{aligned}$$

$$\text{donc } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

**c)** On a :  $\sin(a+b) = \sin(a-(-b))$   
 $= \sin a \cos(-b) - \sin(-b) \cos a$

$$\text{donc } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

**14** Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2 \times (2x)) = 2 \cos^2(2x) - 1 \\ &= 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1,\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

**16 1.** On a :  $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$

$$\text{donc } \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

**2.** Comme  $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$  donc, d'après

**1.**, on a :  $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$

**17 a)** Comme  $\frac{5\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ,  $\cos \frac{5\pi}{8} \leq 0$  et  
 $\sin \frac{5\pi}{8} \geq 0.$

**b)** On a :  $\cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) = 2 \cos^2 \frac{5\pi}{8} - 1$

$$\text{donc } \cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Comme } \cos \frac{5\pi}{8} \leq 0, \text{ on a : } \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\text{On a : } \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$\text{donc } \sin^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Comme } \sin \frac{5\pi}{8} \geq 0, \text{ on a : } \sin \frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

**19 a)**  $\sin^2(5x) = \frac{1 - \cos(10x)}{2}.$

**b)**  $\cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$$\text{donc } \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

**20** On donne respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $z$  :

**a)** 4 et 2. **b)** -2 et -1.

**c)**  $1 - \sqrt{2}$  et  $-(1 + \sqrt{2})$ . **d)** 0 et -3.

**e)** 8 et 0. **f)** 0 et  $2\sqrt{3}$ .

**g)**  $\frac{6}{7}$  et  $\frac{1}{7}$ . **h)**  $-\sqrt{3}$  et 1.

**21 a)**  $4 - 2i$ . **b)**  $-2 + i$ .

**c)**  $1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i$ . **d)** 3i.

**e)** 8. **f)**  $-2i\sqrt{3}$ .

**g)**  $\frac{6}{7} - \frac{1}{7}i$ . **h)**  $-\sqrt{3} - i$ .

**22 a)**  $7 - 3i$ . **b)**  $-7 + 5i$ . **c)**  $-1 + 3i\sqrt{3}$ .

**23 a)**  $2 - i$ . **b)**  $8 - 3i$ . **c)**  $-10 + 4i$ . **d)**  $9 - 4i$ .

**24 a)**  $5 - i$ . **b)**  $37 + 3i$ . **c)**  $18 - 4i$ .

**d)**  $2 + 2i\sqrt{3}$ . **e)**  $-16 - 30i$ .

**25 a)**  $-23 - i$ . **b)**  $-8 - 6i$ . **c)**  $-45 + 28i$ .

**d)**  $-3 - i$ . **e)**  $-7 + 2i$ .

**26 a)**  $24 + 15i$ . **b)**  $-39 - 80i$ . **c)** -9.

**d)**  $8 + 5i$ . **e)** -3.

**27 a)**  $\bar{z} = 2 - 3i$  et  $z\bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13$ .

**b)**  $\bar{z} = 1 + 3i$  et  $z\bar{z} = 1^2 + (-3)^2 = 10$ .

**c)**  $\bar{z} = -5 - \sqrt{2}i$  et  $z\bar{z} = (-5)^2 + \sqrt{2}^2 = 27$ .

**d)**  $\bar{z} = 4i$  et  $z\bar{z} = (-4)^2 = 16$ .

**e)**  $\bar{z} = -1$  et  $z\bar{z} = (-1)^2 = 1$ .

**29 a)**  $\frac{1}{-3 + i} = \frac{-3 - i}{(-3)^2 + 1^2} = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$ .

**b)**  $\frac{i - 7}{-5i + 2} = \frac{(i - 7)(5i + 2)}{(-5)^2 + 2^2} = -\frac{19}{29} - \frac{33}{29}i$ .

**c)**  $\frac{6 - 2i}{(4 - i) - (-2 + i)} = \frac{6 - 2i}{6 - 2i} = 1$ .

$$\text{d)} \frac{(1-9i)(2i+3)}{1+i} = \frac{21-25i}{1+i} = \frac{(21-25i)(1-i)}{1^2+1^2} = -2-23i.$$

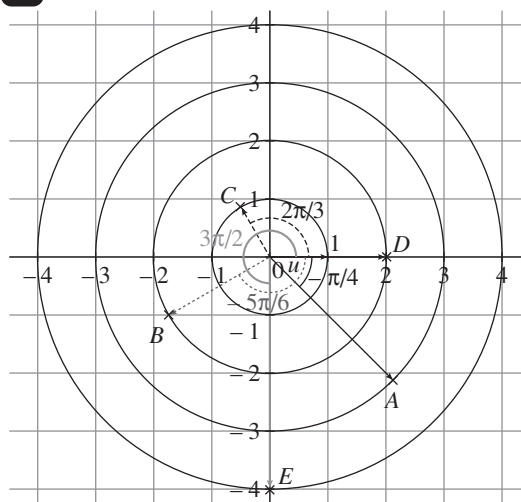
$$\text{30 a)} \frac{1}{z} = \frac{-1-3i}{(-1)^2+3^2} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

$$\text{b)} \frac{z}{z'} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{2^2+(-1)^2} = -1+i.$$

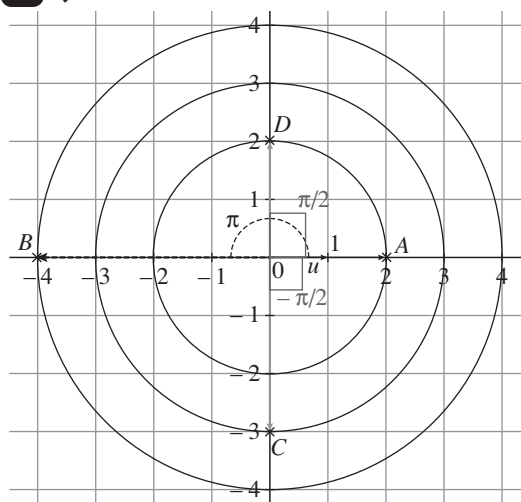
$$\text{c)} \frac{iz'}{z} = \frac{1+2i}{-1+3i} = \frac{(1+2i)(-1-3i)}{(-1)^2+3^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{d)} \frac{1-z'}{1+z} = \frac{-1+i}{2-3i} = \frac{(-1+i)(2+3i)}{2^2+(-3)^2} = -\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

**33**



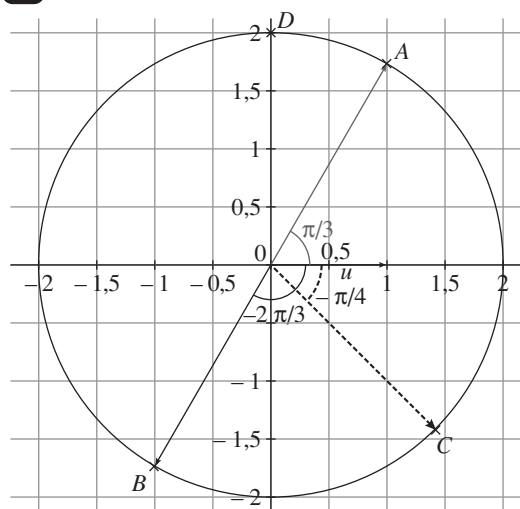
**34 a)**



**b)** Un nombre complexe qui est l'affixe d'un point de l'axe des réels est un réel. Les arguments d'un nombre réel strictement positif sont de la forme  $0 + 2k\pi$  avec  $k$  entier relatif et ceux d'un nombre réel strictement négatif de la forme  $\pi + 2k\pi$  avec  $k$  entier relatif.

**c)** Un nombre complexe qui est l'affixe d'un point de l'axe des ordonnées est un imaginaire pur. Les arguments d'un nombre imaginaire pur sont de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k$  entier relatif.

**35 a)**



**b)** On a :  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$  donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

**c)** On a :  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

à  $2\pi$  près donc  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$  : A et B sont symétriques par rapport à O.

**d)** ABC est inscrit dans le cercle C de diamètre [AB] donc ABC est rectangle en C.

$$\text{37 a)} \left[3; \frac{3\pi}{4}\right] = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{b)} [4; \pi] = -4.$$

$$\text{c)} \left[5; -\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{d)} [2; 0] = 2.$$

$$\text{38 a)} \left[\frac{1}{2}; -\frac{5\pi}{6}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i.$$

$$\text{b)} \left[2; \frac{2\pi}{3}\right] = -1 + i\sqrt{3}.$$



$$\text{c) } \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] = 1 + i.$$

$$\text{d) } \left[ \frac{1}{3}; -\frac{\pi}{2} \right] = -\frac{1}{3}i.$$

**40 a)** On a :  $|z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  et si  $\theta$  est un argument de  $z$ , on a :  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et  $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  à  $2\pi$

près. Conclusion :  $z = \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$ .

En faisant de même, on a :

$$\text{b) } z = \left[ 2; \frac{\pi}{2} \right]. \quad \text{c) } z = \left[ 6; -\frac{5\pi}{6} \right]. \quad \text{d) } z = [5; \pi].$$

$$\text{41 a) } z = \left[ 4; \frac{\pi}{3} \right]. \quad \text{b) } z = \left[ 10; -\frac{5\pi}{6} \right].$$

$$\text{c) } z = [8; 0]. \quad \text{d) } z = \left[ 12; \frac{2\pi}{3} \right].$$

$$\text{42 a) } z = \left[ 8; \frac{\pi}{4} \right]. \quad \text{b) } z = \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{5\pi}{6} \right].$$

$$\text{c) } z = \left[ 6\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4} \right]. \quad \text{d) } z = \left[ \sqrt{3}; -\frac{\pi}{6} \right].$$

**44 a)** On a :

$$AB = |z_B - z_A| = |(-2 + 2i) - (3 - i)| = |-5 + 3i| = \sqrt{34}$$

De même, on a :

$$BC = |z_C - z_B| = |(1 - 3i) - (-2 + 2i)| = |3 - 5i| = \sqrt{34}$$

$$\text{et } AC = |z_C - z_A| = |(1 - 3i) - (3 - i)| = |-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$$

**b)** On en conclut que  $ABC$  est isocèle en  $B$ .

**45** On a :  $AB = |z_B - z_A| = |8 - i| = \sqrt{65}$ . De même, on a :  $BC = |z_C - z_B| = |-6 - 3i| = \sqrt{45}$  et  $AC = |z_C - z_A| = |2 - 4i| = \sqrt{20}$ . Comme  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , on en conclut que  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

$$\text{47 a) } z_1 z_2 = \left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right] \cdot [4; 0] = \left[ 5 \times 4; -\frac{2\pi}{3} + 0 \right] = \left[ 20; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$\text{b) } z_1 z_3 = \left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right] \cdot \left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right] = \left[ 5 \times 1; -\frac{2\pi}{3} + \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left[ 5; -\frac{5\pi}{6} \right].$$

$$\text{c) } z_2 z_3 = [4; 0] \cdot \left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right] = \left[ 4 \times 1; 0 + \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left[ 4; -\frac{\pi}{6} \right].$$

$$\text{49 a) } \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right]} = \left[ \frac{1}{5}; -\left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right] = \left[ \frac{1}{5}; \frac{2\pi}{3} \right].$$

$$\text{b) } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{[4; 0]} = \left[ \frac{1}{4}; -0 \right] = \left[ \frac{1}{4}; 0 \right].$$

$$\text{c) } \frac{1}{z_3} = \frac{1}{\left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right]} = \left[ \frac{1}{1}; -\left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left[ 1; \frac{\pi}{6} \right].$$

$$\text{51 a) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right]}{[4; 0]} = \left[ \frac{5}{4}; -\frac{2\pi}{3} - 0 \right] = \left[ \frac{5}{4}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$\text{b) } \frac{z_2}{z_3} = \frac{[4; 0]}{\left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right]} = \left[ \frac{4}{1}; -\left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left[ 4; \frac{\pi}{6} \right].$$

$$\text{c) } \frac{z_3}{z_1} = \frac{\left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right]}{\left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right]} = \left[ \frac{1}{5}; -\frac{\pi}{6} - \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right] = \left[ \frac{1}{5}; \frac{\pi}{2} \right].$$

**53 1.a)**

$$z_1^2 = \left[ 5; -\frac{2\pi}{3} \right]^2 = \left[ 5^2; 2 \times \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right] = \left[ 25; -\frac{4\pi}{3} \right].$$

$$\text{b) } z_2^3 = [4; 0]^3 = [4^3; 3 \times 0] = [64; 0].$$

$$\text{c) } z_3^5 = \left[ 1; -\frac{\pi}{6} \right]^5 = \left[ 1^5; 5 \times \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left[ 1; -\frac{5\pi}{6} \right].$$

**2.** On en déduit que :

$$z_1^2 = 25 \left( \cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{4\pi}{3} \right) \right) = -\frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_2^3 = [64; 0] = 64(\cos 0 + i \sin 0) = 64 \text{ et}$$

$$z_3^5 = 1 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

54

Nombre complexe	Module	Argument (à $2\pi$ près)
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
$zz'$	$2 \cdot 3 = 6$	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$
$\frac{z}{z'}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$
$z^2$	$3^2 = 9$	$2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{z'}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{z'}{z}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$
$z'^6$	$2^6 = 64$	$6 \times \frac{\pi}{6} = \pi$

55

Nombre complexe	Module	Argument (à $2\pi$ près)
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{5}$	$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
$zz'$	$5 \cdot 3 = 15$	$-\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$
$\frac{z}{z'}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$
$z^2$	$5^2 = 25$	$2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$
$\frac{1}{z'}$	$\frac{1}{3}$	$-\pi$
$\frac{z'}{z}$	$\frac{3}{5}$	$\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$
$z'^6$	$3^6 = 729$	$6\pi$ ou encore 0

**56 a)** On a :  $z_1 = \left[1; -\frac{2\pi}{3}\right]$  et  $z_2 = [1; 0]$ .

**b)** On a alors :  $z_1^3 = \left[1; -\frac{2\pi}{3}\right]^3 = \left[1^3; 3 \times \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = [1; -2\pi] = [1; 0] = z_2$ .

**c)** On a :

$$z_1^{2010} = \left[1; -\frac{2\pi}{3}\right]^{2010} = \left[1^{2010}; 2010 \times \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = [1; -1340\pi] = [1; 0] = z_2.$$

**58 a)**  $|z| = 3$  et  $\arg z = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

**b)**  $|z| = 2$  et  $\arg z = -\frac{\pi}{6}$  à  $2\pi$  près.

**c)**  $|z| = 1$  et  $\arg z = \frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

**d)**  $|z| = \frac{1}{2}$  et  $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$  à  $2\pi$  près.

**60 a)**  $z = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i$ .

**b)**  $z = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} + i\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**c)**  $z = \sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**d)**  $z = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = -1 + i$ .

**62 a)** On a :

$$|z| = |2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

En notant  $\theta$  un argument de  $z$ , on a :

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près d'où } z = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

En procédant de même, on a :

**b)**  $z = 7 = 7e^{0i}$ .

**c)**  $z = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .

**d)**  $z = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} = 6e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ .

**63 a)** On a :

$$|z| = |-4 - 4i| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}.$$

En notant  $\theta$  un argument de  $z$ , on a :

$$\cos\theta = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{donc } \theta = -\frac{3\pi}{4} \text{ à } 2\pi \text{ près d'où } z = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

En procédant de même, on a :

**b)**  $z = -3 = 3e^{i\pi}$ .

**c)**  $z = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

**d)**  $z = -3\sqrt{3} + 3i = 6e^{\frac{5\pi}{6}i}$ .

**64 a)** On a :

$$|z| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}. \text{ En notant } \theta \text{ un argument de } z, \text{ on a : } \cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près d'où}$$

$$z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

En procédant de même, on a :

**b)**  $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

**c)**  $z = \frac{1}{3}e^{i\pi}.$  **d)**  $z = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

**65 a)** On a :

$$|z| = |-2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 24 = 2\sqrt{6}$$

En notant  $\theta$  un argument de  $z$ , on a :

$$\cos \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta = -\frac{3\pi}{4} \text{ à } 2\pi \text{ près d'où } z = 2\sqrt{6}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

En procédant de même, on a :

**b)**  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$

**c)**  $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.$

**d)**  $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

**66 a)**  $z_1 z_2 = 15e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 15e^{i\frac{\pi}{6}}.$

**b)**  $z_1 z_2 = \frac{9}{3}e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})} = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}.$

**c)**  $z_1 z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 6e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2})} = 6e^{i\frac{4\pi}{3}}.$

**d)**  $z_1 z_2 = 5e^{i\pi} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 10e^{i(\pi + \frac{\pi}{4})} = 10e^{i\frac{5\pi}{4}}.$

**67 a)**  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{6}}.$

**b)**  $\frac{1}{z_1} = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{9}e^{-i\frac{3\pi}{2}}.$

**c)**  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ et } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$

**d)**  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5e^{i\pi}} = \frac{1}{5}e^{-i\pi} \text{ et } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

**68 a)**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{5e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3}{5}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = \frac{3}{5}e^{i\frac{\pi}{2}}.$

**b)**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{9}e^{i(-\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{27}e^{-i\frac{7\pi}{4}}.$

**c)**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{3}{2}e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6})} = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

**d)**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{5}{2}e^{i(\pi - \frac{\pi}{4})} = \frac{5}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

**69 a)**  $z_1^2 = 3^2 e^{2 \times i\frac{\pi}{3}} = 9e^{i\frac{2\pi}{3}}$

et  $z_2^6 = 5^6 e^{6 \times (-i\frac{\pi}{6})} = 15625e^{-i\pi}.$

**b)**  $z_1^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{2 \times (-i\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{9}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

et  $z_2^6 = 9^6 e^{6 \times (i\frac{3\pi}{2})} = 531441e^{i9\pi} = 531441e^{i\pi}.$

**c)**  $z_1^2 = (3i)^2 = -9 = 9e^{i\pi}$

et  $z_2^6 = 2^6 e^{6 \times (i\frac{5\pi}{6})} = 64e^{i5\pi} = 64e^{i\pi}.$

**d)**  $z_1^2 = 25 = 25e^{0i}$  et  $z_2^6 = 2^6 e^{6 \times (i\frac{\pi}{4})} = 64e^{i\frac{3\pi}{2}}.$

**70** On a :  $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2} \times 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}},$

$z_1^2 = \frac{1}{4}e^{0i}, z_2^6 = 2^6 e^{-6 \times \frac{2i\pi}{3}} = 64e^{-4i\pi} = 64e^{0i},$

$\frac{1}{z_1} = 2e^{0i} \text{ et } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2}}{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{1}{4}e^{\frac{2i\pi}{3}}.$

**72 a)** On a :  $|z_1| = 4, \arg z_1 = -\frac{3\pi}{4} \text{ à } 2\pi \text{ près}$

et  $|z_2| = 2\sqrt{3}, \arg z_2 = -\frac{5\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$

**b)** D'après **a)**, on a :  $z_1 = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$

**c)** D'après **b)**, on a :

$z_1 \times z_2 = 4 \times 2\sqrt{3}e^{-i\frac{3\pi}{4} - i\frac{5\pi}{6}} = 8\sqrt{3}e^{-\frac{19i\pi}{6}},$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}},$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{3\pi}{4} + i\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ et}$

$z_1^4 = 4^4 e^{-4 \times i\frac{3\pi}{4}} = 256e^{-3i\pi} = 256e^{i\pi}.$

**74 a)** On a :  $|z| = 2$  et  $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

**b)** D'après **a)**, on a :  $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

**c)** D'après **b)**, on a :  $z^n = 2^n e^{-i\frac{2n\pi}{3}}$ .

**d)**  $z^n$  est un réel si et seulement s'il existe un réel  $k$  tel que  $\frac{2n\pi}{3} = 0 + k\pi$  soit, pour la plus petite valeur de  $n$ ,  $n = 3$  et ce nombre est alors  $z^3 = 2^3 e^{-i2\pi} = 8$ .

**75 a)** On a :  $|z| = 2$  et  $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$  à  $2\pi$  près.

**b)** D'après **a)**, on a :  $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

**c)** D'après **b)**, on a :  $z^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$ .

**d)**  $z^n$  est un imaginaire pur si et seulement s'il existe un entier  $k$  tel que  $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  soit, pour la plus petite valeur de  $n$ ,  $n = 2$  et ce nombre est alors  $z^2 = 2^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -4i$ .

**76 a)** On a :  $|z| = 2\sqrt{3}$  et  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

**b)** D'après **a)**, on a :  $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**c)** D'après **b)**, on a :  $z^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ .

**d)**  $z^n$  est un imaginaire pur si et seulement s'il existe un entier  $k$  tel que  $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  soit,  $n = \frac{3}{2} + 3k$ . Or  $n$  et  $k$  sont entiers donc il n'existe pas de valeur de  $n$  telle que  $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  :  $z^n$  n'est jamais un imaginaire pur.

**77 a)** On a :  $z_1 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$  et  $z_2 = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ .

**b)** D'après **a)**, on a :  $z_1^3 = 2^3 e^{3 \times \frac{5i\pi}{6}} = 8e^{\frac{5i\pi}{2}} = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$

et  $z_2^2 = 2^2 e^{-2 \times \frac{2i\pi}{3}} = 4e^{-\frac{4i\pi}{3}}$ .

**c)** D'après **b)**, on a :  $Z = \frac{z_1^3}{z_2^2} = 2e^{\frac{i\pi}{2} + \frac{4i\pi}{3}} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ .

**d)** On a :  $Z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$  donc

$$Z = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

**78 a)** On a :  $z_0 = 2e^{i\pi}$ ,  $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

et  $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

**b)** D'après **a)**, on a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_0 z_1^2}{z_2^3} = \frac{2e^{i\pi} \times \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

**c)** D'après **b)**, on a :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

**79 1.** On a :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 + 2i)}{2^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

**2. a)** On a :  $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$  et

$$z_B = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

**b)** D'après **a)**, on a :  $z = \frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$ .

**3.** On a :  $z = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  et

$$z = \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{7\pi}{12}} = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ donc,}$$

par égalité des parties réelles et imaginaires des deux écritures de  $z$ , on a :  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$\text{et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

**80 a)** On a :  $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$  et

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (1 - i\sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

**b)** On a  $z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$  donc

$$z_1 z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

**c)** On a :  $z_1 \times z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$  et

$$z_1 z_2 = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ donc, par égalité}$$

des parties réelles et imaginaires des deux écritures de  $z_1 \times z_2$ , on a :  $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  et

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) On a : } \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{81 a) On a : } z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{et } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } z_2 &= 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ \text{donc } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}. \end{aligned}$$

$$\text{c) On a : } \frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$$

$$\text{et } \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} \text{ donc, par égalité des parties réelles}$$

et imaginaires des deux écritures de  $\frac{z_1}{z_2}$ , on a :

$$\cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) On a : } \cos \frac{11\pi}{12} &= \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sin \frac{11\pi}{12} &= \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

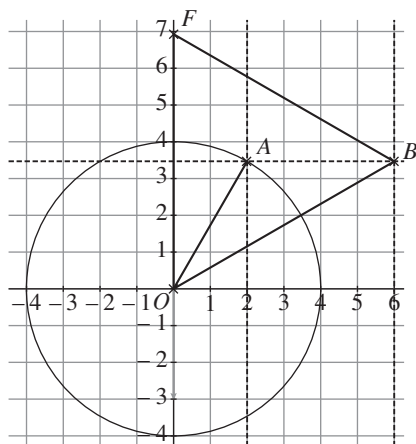
## Problèmes

**84 1. a)** On a :  $|z_A| = 4$ ,  $\arg z_A = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près

et  $|z_B| = 4\sqrt{3}$ ,  $\arg z_B = \frac{\pi}{6}$  à  $2\pi$  près.

**b)**  $OA = |z_A| = 4$ . On construit donc le point A comme le point d'abscisse 2 et d'ordonnée positive du cercle de centre O et de rayon 4.

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**c)** On construit le point B comme le point d'abscisse 6 et d'ordonnée égale à celle de A.

**2. a)**  $AB = |z_B - z_A| = |4| = 4 = OA$  donc  $OAB$  est isocèle en A.

**b)** On a :  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg z_A = \frac{\pi}{3}$

et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg z_B = \frac{\pi}{6}$  à  $2\pi$  près. D'où la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{AOB}$  est  $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ .

Comme  $OAB$  est isocèle en A, la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{ABO}$  est aussi  $\frac{\pi}{6}$  et celle de

$$\widehat{OAB} \text{ est } \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

**3. a)** On peut placer précisément le point  $F$  comme le point de l'axe des ordonnées dont l'ordonnée est le double de l'ordonnée de  $B$ .

**b)** Par construction,  $B$  est sur la médiatrice de  $[OF]$  donc  $OBF$  est isocèle en  $B$ . Or  $|z_F| = 4\sqrt{3} = |z_B|$  donc  $OF = OB$  d'où  $OBF$  est équilatéral.

**c)** On a :  $|z_A - z_F| = |2 - 2i\sqrt{3}| = 4$   
donc  $AF = 4 = OA = AB$  : le point  $A$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $OBF$ .

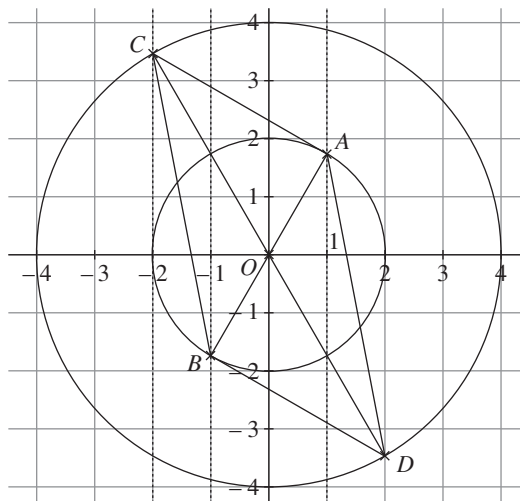
**85 1.** L'équation  $iz = -\sqrt{3} + i$  admet une seule solution :  $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{i} = 1 + i\sqrt{3}$ .

**2. a)** On a :  $z_B = -z_A = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \left( 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$   
 $= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

et  $z_C = z_A^2 = 2^2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**b)** On a :  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -z_A = -1 - i\sqrt{3}$  et  
 $z_C = (1 + i\sqrt{3})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ .

**c)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**d)** On a :  $AB = |z_B - z_A| = 2|z_B| = 4$ ,

$CB = |z_B - z_C| = |1 - 3i\sqrt{3}| = \sqrt{28}$  et

$CA = |z_A - z_C| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12}$ .

Comme  $CB^2 = AB^2 + CA^2$ , on en déduit que le triangle  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

**3.** On a :

$$z_D = \frac{8}{z_A} = \frac{8(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = 2 - 2i\sqrt{3} = -z_C.$$

On a :  $\frac{z_C + z_D}{2} = 0 = z_O$  et  $\frac{z_A + z_B}{2} = 0 = z_O$

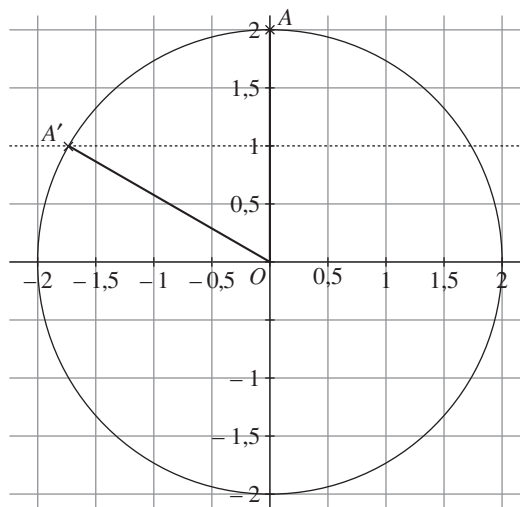
donc les diagonales du quadrilatère  $ACBD$  se coupent en leur milieu  $O$ . Conclusion :  $ACBD$  est un parallélogramme.

**86** Comme les points  $A'$  et  $B'$  sont les symétriques respectifs de  $A$  et  $B$  par rapport à  $O$ , les diagonales de  $ABA'B'$  se coupent en leur milieu  $O$  donc  $ABA'B'$  est un parallélogramme. Par ailleurs, ses diagonales sont de même longueur (car  $OA = |z_A| = 3$  et  $OB = |z_B| = 3$ ) et sont perpendiculaires (car  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  à  $2\pi$  près). On en déduit que  $ABA'B'$  est un carré.

**87 1. a)**  $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

**b)**  $z_{A'} = z_A \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ .

**c)** La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**d)** On a :  $|z_{A'}| = \left| z_A \times e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z_A| \times \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z_A|$

donc  $OA = OA'$ .

**e)** Une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$  est  $\arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$  à  $2\pi$  près et une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA'})$  est  $\arg(z_{A'}) = \frac{5\pi}{6}$  à  $2\pi$  près. On en déduit que la mesure principale de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$  est  $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ .

f) On en conclut que la transformation géométrique qui permet de passer de  $A$  à  $A'$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

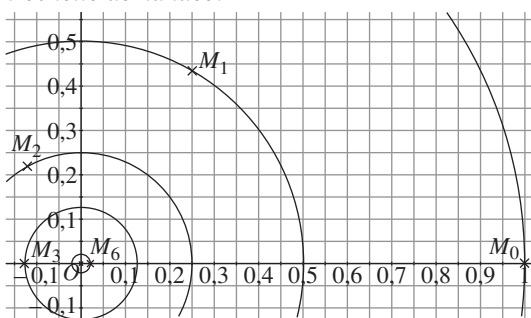
2. a)  ch8\_pb87.ggb

b) On conjecture que la transformation géométrique qui permet d'obtenir  $N'$  à partir de  $N$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

**88 1. a)**  $z_1 = \left[ \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3} \right]$  ;  $z_2 = \left[ \frac{1}{4}; \frac{2\pi}{3} \right]$

et  $z_3 = \left[ \frac{1}{8}; \pi \right]$ .

b) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



2. a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_n$

donc, par passage au module, on a :  $r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$

donc  $(r_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $r_0 = 1$ .

b) Comme la raison de la suite géométrique  $(r_n)$  est dans l'intervalle  $[0; 1[$ , la limite de  $(r_n)$  est 0.

c) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n r_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . La distance  $OM_n$ , en cm, sur la représentation graphique est  $10\left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Il

s'agit donc de résoudre à l'aide de la calculatrice l'inéquation  $10\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,1$  d'où, par balayage à la calculatrice ou utilisant d'un algorithme sur la détermination d'un seuil ou en utilisant la fonction ln, on a :  $N = 6$ .

3. On a :  $z_6 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{64} e^{2\pi i} = \frac{1}{64} e^{0i}$ .

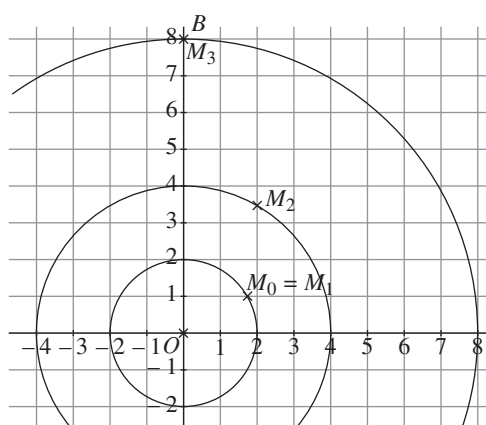
On construit donc le point  $M_6$  comme point de l'axe des abscisses situé à  $\frac{1}{64} \times 10 \approx 0,16$  mm de  $O$ .

**89 1. a)** On a :  $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

b) On en déduit que  $z_1 = z_0^1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,

$z_2 = z_0^2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_3 = z_0^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

c) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



2. a)  $z_n = z_0^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ .

b) D'après a), il s'agit de chercher le plus petit entier naturel  $n$  tel qu'il existe un entier relatif  $k$  vérifiant  $\frac{n\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  soit  $n = -3 + 12k$ .

On prend alors  $k = 1$  donc  $N = 9$ .

c) La distance  $OM_N$  est alors  $|z_9| = 2^9 = 512$ .

**90 1. a)** On a :  $\Delta = -36$  donc l'équation n'a pas de solution réelle.

b) En développant

$(z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i)$ , on obtient bien  $z^2 - 4z + 13 = (z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i)$ .

c) On a :  $z^2 - 4z + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 2 + 3i) = 0$  ou  $(z - 2 - 3i) = 0$

donc l'équation proposée a deux solutions complexes conjuguées :  $z = 2 - 3i$  et  $z = 2 + 3i$ .

2. a) On a :  $\Delta = -4$  donc l'équation n'a pas de solution réelle.

b) En développant

$(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)$ , on obtient bien

$z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = (z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)$ .

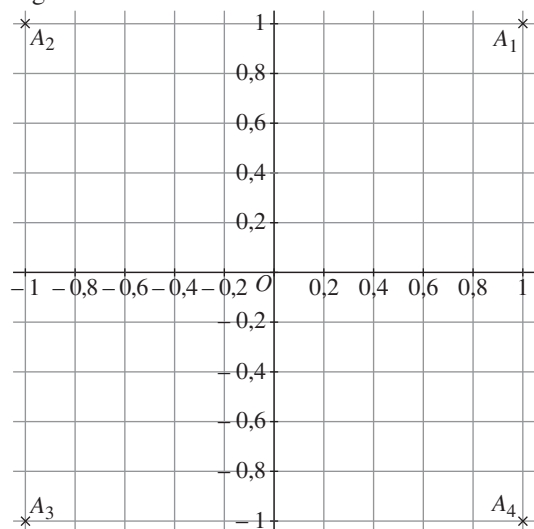
c) On a :  $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i) = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{3} - i) = 0$  ou  $(z - \sqrt{3} + i) = 0$  donc l'équation proposée a deux solutions complexes conjuguées :  $z = \sqrt{3} + i$  et  $z = \sqrt{3} - i$ .

**91 1.** On a :

$$\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \sin(\omega t) \cos \frac{\pi}{4} + \cos(\omega t) \sin \frac{\pi}{4} \right) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t) = u_1(t).$$

On a donc :  $\underline{U}_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$ .

Figure :



**2. a)** Comme  $\underline{U}_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

et  $\underline{U}_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i$ .

Comme  $\underline{U}_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$

et  $\underline{U}_3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i$ .

Enfin, comme  $\underline{U}_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \underline{U}_3$ ,  $\underline{U}_4 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$

et  $\underline{U}_4 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 1 - i$ .

b) Voir ci-dessus.

c) Comme  $\underline{U}_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ , on a :

$$u_2(t) = \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos(\omega t) - \sin(\omega t).$$

De même, on a :

$$u_3(t) = \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{4}\right) = -\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$$

$$\text{et } u_4(t) = \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{7\pi}{4}\right) = -\cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$

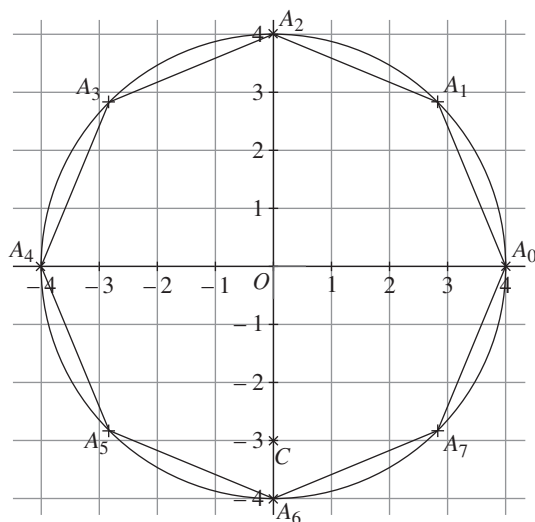
**92 1. a)** L'angle  $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1})$  vaut  $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ .

L'écriture exponentielle de l'affixe  $z_1$  de  $A_1$  est alors  $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ .

b) De même, l'écriture exponentielle de l'affixe  $z_2$  de  $A_2$  est  $Re^{i\frac{2\pi}{4}} = Re^{i\frac{\pi}{2}}$ .

c) De façon générale, pour tout entier  $n$  compris entre 1 et 7, on a :  $z_n = Re^{i\frac{n\pi}{4}}$ .

d) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**2.** La forme algébrique de  $z_k$  est

$$Re^{i\frac{k2\pi}{n}} = R \cos\left(\frac{k2\pi}{n}\right) + iR \sin\left(\frac{k2\pi}{n}\right).$$

**3.** ch8\_pb92.ods

a) Dans la cellule B5, on obtient l'abscisse de  $A_0$  pour un maillage à 8 points.

b) On entre dans la cellule C5  
« :=\$B\$1\*SIN(2\*\$A5\*PI()/B\$3) ».

c) Dans la cellule G5, on obtient l'ordonnée de  $A_0$  pour un maillage à 12 points.

d) On utilise le symbole \$ dans la formule entrée en B5 pour avoir une référence absolue.

e) Voir fichier.

f) On doit copier la plage D5 : E5 jusqu'à la ligne n° 14 pour faire une représentation des points du maillage dans le cas d'un maillage à 10 points.



**g)** Pour 12 points, on va jusqu'à la ligne n° 16.

**4. a)** On a :  $z_0 = R$  et  $z_1 = R \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + iR \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$   
donc  $z_1 - z_0 = R\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1 + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ .

**b)** On en déduit que

$$|z_1 - z_0| = R \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

donc, en développant l'identité remarquable

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right)^2, \text{ on a :}$$

$$|z_1 - z_0| = R \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

**c)** Pour tout réel  $x$ , on a :  $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2(x)$

$$\text{donc } 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

**d)** On a :  $A_0 A_1 = |z_1 - z_0| = R \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$   
$$= R \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

donc, comme  $\frac{\pi}{n} \in [0; \pi]$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$

d'où  $A_0 A_1 = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ .

**e)**  $A_0 A_1 = 40 \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) \approx 6,3 \text{ mm}$  à 0,1 mm près.

**f)** Il suffit de déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que  $40 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < 5$ . On trouve  $n = 26$ .

**93 1. a)** L'équation  $s^2 + 2ms + 1 = 0$  a pour discriminant  $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4(1 - m^2)$ . Or  $m$  appartient à  $]0; 1[$  donc  $\Delta < 0$  et l'équation n'a pas de solution réelle.

**b)** En développant  $(s - s_1)(s - \overline{s_1})$ , on a :  
 $(s - s_1)(s - \overline{s_1}) = s^2 - 2 \operatorname{Re}(s_1)s + |s_1|^2$  d'où  
 $s^2 + 2ms + 1 = (s - s_1)(s - \overline{s_1})$ . On en déduit :  
 $s^2 + 2ms + 1 = 0 \Leftrightarrow (s - s_1)(s - \overline{s_1}) = 0$   
 $\Leftrightarrow (s - s_1) = 0$  ou  $(s - \overline{s_1}) = 0$  ; l'équation proposée a deux solutions complexes conjuguées :  
 $s_1 = -m + i\sqrt{1 - m^2}$  et  $s_2 = -m - i\sqrt{1 - m^2}$ .

**2. a)** Par lecture graphique, on atteint pour la première fois la vitesse demandée après 2 secondes mais on dépasse ensuite cette vitesse.

**b)** Par lecture graphique,  $D_R \approx 37 \%$ . La consigne est un changement de  $40 \text{ km.h}^{-1}$  donc la vitesse maximale atteinte est  $\frac{137}{100} \cdot 90 = 123,3 \text{ km.h}^{-1}$ .

**3.**  $D_R = e^{-\pi \left| \frac{R(s_1)}{I(s_1)} \right|} = e^{-\pi \left| \frac{-0,3}{\sqrt{0,91}} \right|} \approx 0,37$  à 0,01 près. On retrouve bien le résultat obtenu par lecture graphique.

**4.** On cherche la plus petite valeur de  $m$  pour laquelle  $e^{-\pi \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}} < 0,2$ . À  $10^{-2}$  près, on trouve  $m = 0,46$ .

## Vers le Bac

**94 1. a)** Vrai :  $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$  et  
 $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près donc  $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**b)** Faux :  $|2\sqrt{3} - 2i| = 4$  et  $\arg(2\sqrt{3} - 2i) = \frac{-\pi}{6}$   
à  $2\pi$  près donc  $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

**c)** Faux :  $z_1 + z_2 = (-1 + 2\sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})i$  et  
 $|(-1 + 2\sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})i| = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} \neq 6$ .

**2. a)** Faux :  $|z_3 \cdot z_4| = |z_3| \cdot |z_4| = 3 \cdot 2 = 6$ .

**b)** Faux :  
 $\arg(z_3 \times z_4) = \arg(z_3) + \arg(z_4) = \pi + \frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$   
à  $2\pi$  près.

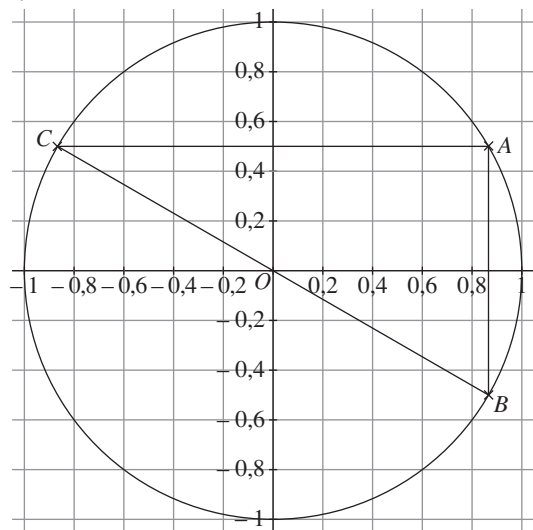
**c)** Vrai :  
 $\arg\left(\frac{z_3}{z_4}\right) = \arg(z_3) - \arg(z_4) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$   
à  $2\pi$  près.

**95 1. C. 2. B. 3. A. 4. C.**

**96 1. a)** On a :  $|z_A| = 1$ ,  $\arg z_A = \frac{\pi}{6}$  à  $2\pi$  près  
et  $|z_B| = 1$ ,  $\arg z_B = -\frac{\pi}{6}$  à  $2\pi$  près.

**b)** On en déduit que  $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$  et  $z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

c)



2. On a:  $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{5\pi}{6}}$   
 donc  $z_C = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

3. On a:  $AB = |z_B - z_A| = |-i| = 1$ ,

$CB = |z_B - z_C| = |\sqrt{3} - i| = 2$  et

$CA = |z_A - z_C| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ .

Comme  $CB^2 = AB^2 + CA^2$ , on en déduit que le triangle  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

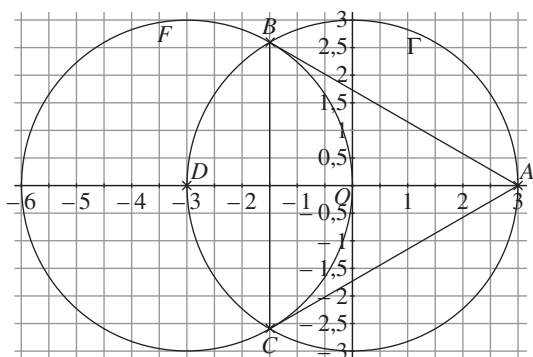
**97 1. a)** On a:  $|z_B| = 3$ ,  $\arg z_B = \frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près  
 et  $|z_C| = 3$ ,  $\arg z_C = -\frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

b) On a:  $z_C = 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

c) On a:  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 3$

donc  $OA = OB = OC = 3$ , donc  $A, B$  et  $C$  sont sur le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon 3.

d)



2. On a:  $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C = 3e^{-i\pi}$  donc  $z_D = -3$ .

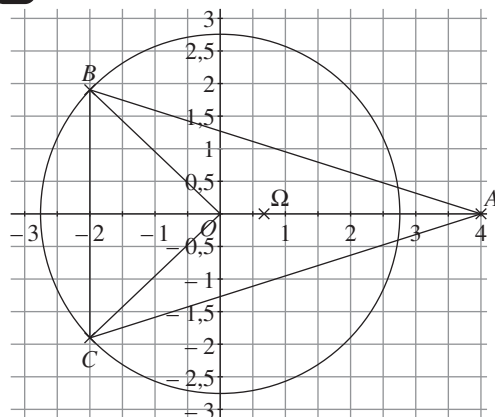
3. a) En utilisant les affixes des points sous forme algébrique, on vérifie que

$$|z_O + 3| = |z_B + 3| = |z_C + 3| = 3$$

donc les points  $O, B$  et  $C$  appartiennent bien à  $F$ .

b)  $F$  est l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - z_D| = 3$  soit  $MD = 3$ :  $F$  est le cercle de centre  $D$  et de rayon 3.

**98 1. a)**



b)  $z_B = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et  $z_C = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ .

c) Comme  $|z_C| = |z_B|$ , le triangle  $OBC$  est isocèle en  $O$ . De plus, une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$  est  $\arg(z_B) = \frac{3\pi}{4}$  à  $2\pi$  près et une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OC})$  est  $\arg(z_C) = -\frac{3\pi}{4}$  à  $2\pi$  près. On en déduit qu'une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  est  $-\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$ . On en déduit que  $OBC$  est un triangle isocèle-rectangle en  $O$ .

2. a) On obtient:

$$|z_A - z_\Omega| = |z_B - z_\Omega| = |z_C - z_\Omega| = \frac{10}{3}.$$

b) On en déduit que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \frac{10}{3}$   
 donc  $\Omega$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  (ce cercle ayant  $\frac{10}{3}$  pour rayon).

**99** On a:  $z_A = \sqrt{3} + i$ ,  $z_B = -\sqrt{3} + i$   
 et  $z_C = -2i$ . On en déduit que

$$AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3},$$

$$CB = |z_B - z_C| = |-\sqrt{3} + 3i| = 2\sqrt{3} \text{ et}$$

$$CA = |z_A - z_C| = |\sqrt{3} + 3i| = 2\sqrt{3}.$$

On en déduit que le triangle  $ABC$  est un triangle équilatéral.



# Exemples de lois à densité

## Activités

### Activité 1 Choisir le bon uniforme !

Dans cette activité, on introduit le concept de loi uniforme sur  $[0; 1]$  en s'appuyant sur deux modélisations, l'une discrète et l'autre continue. On pourra ainsi plus facilement présenter la notion de loi de probabilité continue à densité à partir de cet exemple. On définit aussi, sur cet exemple de loi uniforme, la notion d'espérance mathématique pour une loi de probabilité à densité.

**A 1** La probabilité de tirer un nombre :

- dans l'intervalle  $[0; 0,5]$  : 0,5 ;
- dans  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$  :  $\frac{1}{3}$  ;
- dans  $[0; 9 \times 10^{-11}]$  :  $9 \times 10^{-11}$  ;
- dans  $[0; 5 \times 10^{-11}]$  :  $5 \times 10^{-11}$  .

**2 a)** Chacun de ces nombres s'écrit  $a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \dots + a_{10} \times 10^{-10}$ , où les  $a_i$  sont des entiers compris entre 0 et 9, 0 et 9 inclus. Il y a donc 10 possibilités pour chacun des 10 entiers  $a_i$ , donc  $10^{10}$  nombres au total.

**b)** La probabilité de tirer 0,12345678 est  $\frac{1}{10^{10}}$  .

La probabilité de tirer un nombre de type T dans l'intervalle  $[0; 0,5]$  est  $\frac{5 \cdot 10^9}{10^{10}} = 0,5$  .

La probabilité de tirer un nombre de type T dans l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$  est  $\frac{3333333333}{10^{10}} \approx 0,333333333$  .

La probabilité de tirer un nombre de type T dans l'intervalle  $[0; 9 \times 10^{-11}]$  est  $\frac{1}{10^{10}}$  .

La probabilité de tirer un nombre de type T dans l'intervalle  $[0; 5 \times 10^{-11}]$  est  $\frac{1}{10^{10}}$  .

**3 a)** Le modèle de la question 2. ne donne pas nécessairement une modélisation conforme à notre intuition, les probabilités obtenues pour les deux derniers intervalles ne correspondent pas.

**b)** Il y a  $10^n$  nombres de type T et 0,123456789 est l'un d'entre eux, la probabilité de le tirer est donc  $\frac{1}{10^n}$  .

La probabilité de tirer le nombre 0,123456789 tend vers 0 lorsque le nombre de décimales du modèle tend vers  $+\infty$  .

**B 1** La probabilité de tirer un nombre :

– dans l'intervalle  $[0; 0,5]$  : 0,5 ;

– dans  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$  :  $\frac{1}{3}$  ;

– dans  $[0; 9 \times 10^{-11}]$  :  $9 \times 10^{-11}$  ;

– dans  $[0; 5 \times 10^{-11}]$  :  $5 \times 10^{-11}$ .

**2**  $P(a \leq X \leq b) = 1 - (P(x < a) + P(X > b)) = 1 - (a + 1 - b) = b - a$ .

**3 a)**  $P(X \leq a) = \int_b^a 1 dt$  donc  $f$  est la fonction constante égale à 1 sur  $[0; 1]$ .

**b)**  $\int_a^b 1 dt = b - a = P(a \leq X \leq b)$ .

**4**  $E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Pour une variable aléatoire continue  $X$  qui suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ ,

l'expérience aléatoire correspondante est le choix au hasard d'un réel dans l'intervalle  $[0; 1]$ . On obtient pour espérance le réel  $\frac{1}{2}$ , centre de l'intervalle  $[0; 1]$ , qui s'interprète comme la « moyenne » des valeurs prises par  $X$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  pour un « grand » nombre de réalisations de l'expérience aléatoire liée à  $X$ . Le résultat n'est donc pas surprenant.

## Activité 2 Tout cela est-il bien normal ?

Conformément au programme, cette activité est une introduction de la loi normale à partir de l'observation, à l'aide d'un logiciel, de l'addition de phénomènes aléatoires indépendants et de même loi uniforme. Dans la partie A, on prend soin de faire remarquer que la somme de trois lois uniformes n'est pas une loi uniforme. Dans la partie B, on mène un questionnement à partir du diagramme de la somme de quarante lois uniformes et notamment sur les intervalles « un, deux, trois sigmas » de la loi normale.

**A 1 a)**  $L$  varie dans  $[0; 3]$ .

**b)** Intuitivement, il ne semble pas que  $L$  suive une loi uniforme.

**2 a)** Il suffit d'utiliser la commande ALEA ou RANDOM d'un tableur ou d'une calculatrice.

**b)** Le programme permet d'arriver à la même conclusion.

**B 1**  $L$  varie dans  $[0; 40]$ .

**2 a)** Les barres n'ont pas toutes la même hauteur.

**b)** La fréquence de cet événement est d'environ 0,5. Il semble y avoir à peu près autant de valeurs au-dessus qu'au-dessous de la moyenne.

**c)** 0,65.

**d)** 0,95.

## Travaux Pratiques

### TP 1 Temps de fonctionnement d'un composant électronique

Ce TP a pour but d'introduire la loi exponentielle comme loi de la durée de vie d'un composant électronique et d'aboutir à l'établissement de sa densité de probabilité, puis de calculer des probabilités en utilisant cette loi.

**1** L'événement  $\{T > t\}$  est l'événement : « le composant ne connaît pas de défaillance avant  $t$  unités de temps » et l'événement  $\{t \leq T \leq t + h\}$  est l'événement : « le composant connaît sa première défaillance entre  $t$  et  $t + h$  unités de temps ».

La longueur de l'intervalle de temps  $[t; t + h]$  est  $h$ .

Le nombre  $\lambda$  représente le taux d'avarie par unité de temps.

**2 a)** Pour tout réel  $t > 0$ , on a :  $P(T \leq t) + P(t \leq T \leq t + h) = P(T \leq t + h)$ ,  
donc  $P(t \leq T \leq t + h) = P(T \leq t + h) - P(T \leq t) = P(0 \leq T \leq t + h) - P(0 \leq T \leq t)$   
 $= (F(t + h) - F(0)) - (F(t) - F(0)) = F(t + h) - F(t)$ .

**b)**  $P(0 < T \leq t) + P(T > t) = 1$  d'où  $P(T > t) = 1 - P(0 < T \leq t) = 1 - (F(t) - F(0)) = 1 - F(t)$   
car  $F(0) = 0$ .

**c)**  $\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \frac{P(t \leq T \leq t + h)}{h} = \frac{\lambda h P(T > t)}{h} = \lambda(1 - F(t))$ .

**d)** Par passage à la limite lorsque  $h$  tend vers 0 dans l'égalité précédente, on a  $F'(t) = \lambda(1 - F(t))$   
soit  $F'(t) + \lambda F(t) = \lambda$ .  $F$  est donc solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + \lambda y = \lambda$ .

**e)** Les solutions sont les fonctions de la forme  $y(t) = Ce^{-\lambda t} + 1$ , où  $C$  est une constante réelle quelconque.

**f)**  $F(0) = 0$  donc  $C + 1 = 0$  soit  $C = -1$  et  $F(t) = -e^{-\lambda t} + 1$ .

**g)** Pour tout réel  $t > 0$ ,  $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

**3 a)** L'espérance de  $T$  vaut  $\frac{1}{\lambda}$ . Le temps moyen de vie d'un composant sans connaître d'avarie est égal à  $\frac{1}{\lambda}$ .

**b)** Ils sont inverses l'un de l'autre.

**c)**  $\lambda = 10^{-5}$ .

**d) \***  $P(0 < T < 100) = \int_0^{100} 10^{-5} e^{-10^{-5}t} dt = [-e^{-10^{-5}t}]_0^{100} = 1 - e^{-10^{-3}} \approx 0,001$  à  $10^{-3}$  près;

$* P(100 < T < 1000) = \int_{100}^{1000} 10^{-5} e^{-10^{-5}t} dt = [-e^{-10^{-5}t}]_{100}^{1000} = e^{-10^{-3}} - e^{-10^{-2}} \approx 0,009$  à  $10^{-3}$  près;


$* P(T > 10000) = 1 - P(0 < T \leq 10000) = 1 - \int_0^{10000} 10^{-5} e^{-10^{-5}t} dt = 1 - [-e^{-10^{-5}t}]_0^{10000} = e^{-10^{-1}} \approx 0,905$   
à  $10^{-3}$  près.

## TP 2 Les « cloches » de Gauss

Dans ce TP, on fait observer l'influence de la moyenne et de l'écart type sur une distribution de loi normale.

Ils'agit en particulier d'interpréter graphiquement les probabilités des événements  $\{X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]\}$ ,  $\{X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]\}$ ,  $\{X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]\}$ .

On utilise le tableur ou la calculatrice pour déterminer des probabilités dans le cadre d'une loi normale, et ces calculs sont mis en œuvre dans le cadre concret du contrôle d'une production.

**A 1**  ch9\_tp2.ggb

**2 a)** Il semble que l'on passe d'une courbe  $C_{m,\sigma}$  à une autre par une translation de vecteur ayant une direction horizontale.

**b)**  $f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ; pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f_{0,1}(x - m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2} = f_{m,1}(x)$ .

La transformation géométrique qui permet de passer de la courbe  $C_{0,1}$  à  $C_{m,1}$  est la translation de vecteur  $m \overrightarrow{OI}$ .

**3 a)** Il semble que le maximum de  $f_{m,\sigma}$  diminue lorsque  $\sigma$  augmente et vice versa.


**b)**  $f_{m,\sigma}(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . Ce nombre varie comme l'inverse de  $\sigma$ . La conjecture faite au **a)** est confirmée.

**9 a)**  $p = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f_{m,\sigma}(x) dx = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$ .

**b)** Le nombre  $p$  ne varie pas lorsque l'on fait varier  $m$  et  $\sigma$ .  
Il reste égal à  $0,683$  à  $10^{-3}$  près. Ceci correspond au résultat  $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68$  à  $10^{-2}$  près.

**B 1 a)**  ch9\_tp2.ggb


**b)** Le nombre  $p_1$  ne varie pas lorsque l'on fait varier  $\sigma$ . Il reste égal à  $0,997$  à  $10^{-3}$  près. Ceci correspond au résultat  $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \approx 0,997$  à  $10^{-3}$  près.

**c)**  ch9\_tp2.ggb

**2 a)**  $\sigma_0 = 0,03$  à  $10^{-3}$  près.

**b)** Il s'agit de résoudre  $4,9 \leq 5 - 3\sigma$  et  $5 + 3\sigma \leq 5,1$  soit  $\sigma \leq \frac{0,1}{3}$ . Donc  $\sigma_0 = \frac{0,1}{3}$ .


**c)** Dans ce cas, on a environ  $99,7\%$  de pièces conformes donc  $0,3\%$  de pièces vont au rebut.

**3 a)**  ch9\_tp2.ggb

**b)** L'intervalle de dispersion n'est plus inclus dans l'intervalle de tolérance avec ces valeurs.

**c)** Cette probabilité est égale à  $0,983$  à  $10^{-3}$  près.  $1,7\%$  des pièces seront mises au rebut.

**d)** En prenant  $\sigma$  inférieur à  $0,023$  à  $10^{-3}$  près, l'intervalle de dispersion est inclus dans l'intervalle de tolérance.

**e)**  ch9\_tp2.ggb

**f)** L'écart type du procédé doit être au maximum égal à  $0,023$  pour avoir une production limitant le rebut à  $0,3\%$  lorsque la dimension moyenne varie dans l'intervalle  $[4,97; 5,03]$ .

## Exercices

**2 a)**  $P(2 \leq X \leq 5) = \frac{3}{10}$ ;

**b)**  $P(X < 7) = \frac{7}{10}$ ;

**c)**  $P(X \geq 4) = \frac{6}{10}$ .

**3 1.**  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 6]$ .

**2. a)**  $P(X = 3) = 0$ ;

**b)**  $P(X \leq 4) = \frac{2}{3}$ ;

**c)**  $P(4 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6}$ .

**4 1.**  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 12]$ .

**2. a)**  $P(X \leq 4) = \frac{1}{3}$ ;

**b)**  $P(5 \leq X \leq 7) = \frac{1}{6}$ ;

**c)**  $P(X \geq 10) = \frac{1}{6}$ .


**5**  $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$

**6** Soit  $X$  la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Solenn exprimée en minutes après 9h. La variable  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 30]$ .

**a)**  $P(10 \leq X \leq 11) = \frac{1}{30}$ ;

**b)**  $P(X \leq 10) = \frac{1}{3}$ ; **c)**  $P(X > 20) = \frac{1}{3}$ .

**8 1.** Choisir un point  $M$  au hasard revient dans ce cas à choisir un nombre au hasard entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , la situation relève de la loi uniforme sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**2.**  ch9\_ex8.ods

**3.**  $p \approx 0,13$

Remarque : pour certains élèves, on peut compléter cet exercice en faisant calculer la probabilité de  $E$ .

L'aire du rectangle est  $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ , où  $\theta$  est une variable aléatoire qui prend pour valeur la mesure en radians de l'angle  $(\overline{OA}, \overline{OM})$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ( $\theta$  suit la loi uniforme sur cet intervalle).

L'événement  $E$  dont on cherche la probabilité se traduit par l'inéquation  $\sin(2\theta) < 0,2$ .

Soit  $\theta_0 = \text{Arcsin}(0,2)$ . L'événement  $E$  se traduit par  $\theta \in \left[0; \frac{\theta_0}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . La probabilité de  $E$  est donc égale à  $\frac{2\theta_0}{\pi} \approx 0,128$ .

**9 a)** Choisir un point  $H$  au hasard revient dans ce cas à choisir un nombre au hasard entre 1 et 3, la situation relève de la loi uniforme sur  $[1; 3]$ .

**2.**  ch9\_ex9.ods

**3.**  $p \approx 0,65$ .


**10 a)** La première valeur prise par  $S$  suit la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

**b)** Cet algorithme compte le nombre de tirages au hasard dans  $[0; 1]$  nécessaires pour que la somme des résultats de ces tirages soit supérieur à 1.

**11 a)**  $x + y > z$ ,  $x + z > y$  et  $y + z > x$ .

**b)**  ch9\_ex11.ods

**c)**  $p \approx 0,78$ .

**12 a)**  ch9\_ex12.ods

On peut évaluer  $p \approx 0,57$ .


**b)** Le choix au hasard d'un point dans le carré correspond au choix d'un couple de coordonnées, donc de deux réels indépendants, chacun pris dans  $[0; 1]$ . La condition  $|x - y| > 0,25$  peut s'écrire  $y < x - 0,25$  ou  $y > x + 0,25$ . Si on trace la droite d'équation  $y = x - 0,25$ , les coordonnées des points situés « en dessous » de cette droite vérifient la première condition. Si on trace la droite d'équation  $y = x + 0,25$ , les coordonnées des points situés « au-dessus » de cette droite vérifient la deuxième condition. D'où le choix au hasard d'un point dans la zone colorée revient au choix d'un couple  $(x; y)$  réalisant l'événement  $E$ .

D'où  $p = \frac{0,75^2}{1} = 0,5625$ .

**14**  $E(X) = 0,5$  et  $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ .

**15**  $E(X) = \frac{5}{12}$  et  $\sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{12}}$ .

**16 1. a)** Chacune des variables aléatoires suit la loi uniforme sur  $[0; 10]$ .

**b)**  ch9\_ex16.ods

**2. a)**  $S$  prend ses valeurs dans  $[0; 100]$ .

**b)**  $E(X) = 50$  et  $\sigma(X) = \frac{100}{\sqrt{12}}$ .

**c)** La simulation donne une moyenne proche de 50 mais l'écart type se situe aux environs de 9,2, alors que  $\frac{100}{\sqrt{12}} \approx 28,9$ . On ne peut pas raisonnablement penser que  $S$  suit une loi uniforme. *Remarque : On démontre que la somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme suit une loi normale (voir à ce sujet l'activité 2).*

**18 a)**  $P(T \leq 1000) = 1 - e^{-0,4} \approx 0,33$ .

**b)**  $P(T > 4000) = e^{-1,6} \approx 0,202$ .

**c)**  $P(2000 \leq T \leq 3000) = e^{-0,8} - e^{-1,2} \approx 0,148$ .

**20** On appelle  $T$  la variable aléatoire qui, à un panneau solaire, associe son temps de fonctionnement sans panne (en années).

**a)**  $P(T > 10) = e^{-0,01} \approx 0,990$ .

**b)**  $P(T \leq 20) = 1 - e^{-0,02} \approx 0,02$ .

**c)**  $P(15 \leq T \leq 20) = e^{-0,015} - e^{-0,02} \approx 0,005$ .

**22**  $\lambda = -\frac{\ln 0,05}{10000} \approx 0,0003$ .

**24**  $E(T) = \frac{10^5}{6} \approx 16666,67$ .

**26**  $\lambda = \frac{1}{200000}$ .

**28 a)**  $E(T) = \frac{1}{0,000125} = 8000$ .

La durée de vie moyenne d'une ampoule est 8 000 h.

**b)** \*  $P(T > 10000) = e^{-1,25} \approx 0,287$ .

\*  $P(T < 5000) = 1 - e^{-0,625} \approx 0,465$ .

**c)**  $t_0 = -\frac{\ln 0,85}{0,000125} \approx 1300$ .

La probabilité qu'une ampoule fonctionne plus de 1 300 heures est de 0,85.

**29 a)**  $\lambda = \frac{1}{50} = 0,02$ .

**b)**  $P(T \leq 1) = 1 - e^{-0,02} \approx 0,02$ .

**c)**  $P(T > 5) = e^{-0,1} \approx 0,905$ .

**d)**  $t_0 = -\frac{\ln 0,1}{0,02} \approx 115$ . La probabilité pour que

Sarah attende moins de 115 minutes pour revoir une étoile filante est de 0,9.

**30 a)**  $\lambda = \frac{1}{145} \approx 0,0069$ .

**b)**  $P(T \leq 200) = 1 - e^{-1,4} \approx 0,753$ .

**c)**  $P(T > 500) = e^{-3,5} \approx 0,03$ .

d)  $t_0 = -\frac{\ln 0,7}{0,007} \approx 51$ . La probabilité pour qu'une pièce tombe en panne au bout de 51 jours ou moins est de 0,3.

**31 a)**  $\lambda = \frac{1}{500} = 0,002$ .

b)  $P(T > 365) = e^{-0,73} \approx 0,482$ .

c)  $P(T \leq 730) = 1 - e^{-1,46} \approx 0,768$

d)  $t_0 = -\frac{\ln 0,94}{0,002} \approx 31$ .

Il faut donc fixer la garantie après réparation à un mois.

**33 a)**  $P(113 \leq X \leq 114) = 0,136$ .

b)  $P(X \leq 110) = 0,5 - P(110 \leq X \leq 112) = 0,023$ .

c)  $P(X \geq 115) = 0,5 - P(112 \leq X \leq 115) = 0,001$ .

**35 a)** Figure 1:  $P(X \geq 6)$  ;

Figure 2:  $P(X \leq 6)$  ; Figure 3:  $P(5 \leq X \leq 6)$ .

b) Figure 2, car

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6).$$

c) Figure 1, car

$$P(X \geq 6) = 1 - (P(X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6)) \\ = 1 - P(X \leq 5) - P(5 \leq X \leq 6).$$

**37 a)**  $P(X \geq 237,5) = 0,5 + P(237,5 \leq X \leq 238) = 0,894$ .

b)  $P(X \leq 237,8) = 0,5 - P(237,8 \leq X \leq 238) = 0,309$ .

c)  $P(237,18 \leq X \leq 238,82) = 0,960$ .

**38 a)**  $P(X \leq 90) = 0,5 + P(81,5 \leq X \leq 90) = 0,97$ .

b)  $P(X \geq 76) = 0,5 + P(76 \leq X \leq 81,5) = 0,89$ .

c)  $P(77 \leq X \leq 86) = 0,68$ . La probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance comprise entre 77 et 86 MPa est de 0,68.

**39 a)**  $P(X \leq 549,6) = 0,5 - P(549,6 \leq X \leq 550) = 0,345$ .

b)  $P(X \geq 550,8) = 0,5 - P(550 \leq X \leq 550,8) = 0,212$ .

c)  $P(548 \leq X \leq 552) = 0,954$ .

**41 a)**  $P(120 - \sigma \leq X \leq 120 + \sigma) \approx 0,68$ , d'où  $\sigma = 10$ .

b)  $P(120 - 2\sigma \leq X \leq 120 + 2\sigma) \approx 0,95$ , d'où  $\sigma = 1$ .

c)  $P(120 - 3\sigma \leq X \leq 120 + 3\sigma) \approx 0,997$ , d'où  $\sigma = 0,2$ .

**43** Espérance : 150 ; écart type : 50.

**44** Espérance : 1 ; écart type : 0,6.

**45** Espérance : 7 ; écart type : 3.

**46 a)**  $P(8,18 \leq X \leq 8,48) = 0,904$ .

b)  $h = 2\sigma = 0,18$ . L'intervalle de valeur centré sur la moyenne qui contient environ 95 % de la production est  $[8,15 ; 8,51]$ .

c) L'intervalle  $[8,11 ; 8,55]$  est centré sur 8,33 et correspond à l'intervalle  $[8,33 - 2\sigma ; 8,33 + 2\sigma]$ , d'où  $\sigma = 0,11$ .

**47 a)**  $P(1,35 \leq X \leq 1,65) = 0,97$ .

b) L'intervalle  $[1,35 ; 1,65]$  est centré sur 1,5 et on veut qu'il corresponde à l'intervalle  $[1,5 - 3\sigma ; 1,5 + 3\sigma]$  ; on en déduit :  $\sigma = 0,05$ .

**48 a)** L'intervalle  $[7,495 ; 7,505]$  est centré sur 7,5 et on veut qu'il corresponde à l'intervalle  $[7,5 - 3\sigma ; 7,5 + 3\sigma]$  ; on en déduit :  $\sigma = 0,0017$ .

b)  $P(7,495 \leq X \leq 7,505) = 0,933$ .

**50 a)**  $P(X = 10) = 0,041$ .

b)  $P(X \leq 15) = 0,569$ .

c)  $P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) = 10^{-11}$ .

**52 a)** On répète 50 fois une expérience de façon identique et indépendante : prendre une plaque dans la production et vérifier si elle est conforme au cahier des charges. Cette expérience a deux issues : la pièce est conforme (succès de probabilité  $p = 0,98$ ) ou non. La variable  $X$  prend pour valeurs le nombre de tirages donnant une pièce conforme, c'est-à-dire le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres  $(50 ; 0,98)$ .

b)  $P(X = 46) = 0,015$ .

$P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) = 0,997$ .

$P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47) = 0,922$ .

**54 a)** On répète 500 fois une expérience de façon identique et indépendante : prendre une bouteille dans la production et vérifier si elle est conforme au cahier des charges. Cette expérience a deux issues : la bouteille est conforme (succès de probabilité  $p = 0,9$ ) ou non. La variable  $X$  prend pour valeurs le nombre de tirages donnant une bouteille conforme, c'est-à-dire le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres  $(500 ; 0,9)$ .

b)  $\mu = 500 \times 0,9 = 450$  et

$\sigma = \sqrt{500 \times 0,9 \times 0,1} = \sqrt{45} \approx 6,71$ .

c)  $P(X \geq 460) = 0,5 - P(450 \leq X \leq 460) \approx 0,07$ .

**55 1. a)** On répète 150 fois une expérience de façon identique et indépendante : prendre un



composant dans la production et vérifier s'il est défectueux. Cette expérience a deux issues : le composant est défectueux (succès de probabilité  $p = 0,05$ ) ou non. La variable  $X$  prend pour valeurs le nombre de tirages donnant un composant défectueux, c'est-à-dire le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres  $(150; 0,05)$ .

**b)**  $E(X) = 150 \times 0,05 = 7,5$  et

$$\sigma = \sqrt{150 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{7,125} \approx 2,669.$$

**2. a)**  $n = 1500$  et  $p = 0,05$ .

**b)** On a  $n \geq 30$ ,  $np = 75$  donc  $np \geq 5$  et  $n(1-p) = 1425$  donc  $n(1-p) \geq 5$ . La loi de  $X$  peut donc être approchée par la loi normale de paramètres  $\mu = 75$  et  $\sigma = \sqrt{1500 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{71,25} \approx 8,441$ . Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant cette loi.

**c)**  $P(X \leq 60) \approx P(Y \leq 60)$  et


$$P(Y \leq 60) = 0,5 - P(60 \leq X \leq 75) \approx 0,038.$$

$$P(70 \leq X \leq 80) \approx P(70 \leq Y \leq 80) \approx 0,446.$$

## Problèmes

**58 1.**  $P(0 \leq R \leq 15) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4};$

$$P(J > 15) = P(15 < J \leq 60) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$


**2. a)**  ch9\_pb58.ods

**b)** Dans B2 et dans C2, on entre : « = 60\*Alea() ».

**c)** Si Roméo arrive avant Juliette, on a  $R < J$ ; le temps d'attente est alors  $J - R$ . Si Roméo arrive après Juliette, on a  $R > J$ ; le temps d'attente est alors  $R - J$ .

Dans D2, on entre : « = abs(R-J) ».

**d)** Dans E2 on obtient 1 ou 0. On obtient 1 si la simulation faite à la ligne 2 donne un temps d'attente strictement inférieur à 15 min, et 0 dans le cas contraire.

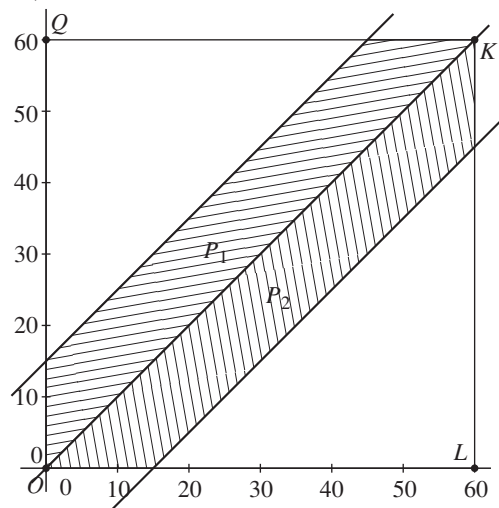
**e)**  ch9\_pb58.ods, feuille « professeur »

**f)** Dans G2, on entre :

« = NB.SI(E2:E501; 1)/500 ».

**g)** On peut évaluer la probabilité cherchée à environ 0,43.

**3. a)**



Le choix au hasard d'un point dans ce carré correspond au choix au hasard d'un couple de coordonnées, indépendantes l'une de l'autre et chacune étant choisie au hasard dans  $[0; 60]$ . On peut donc considérer que l'abscisse du point correspond à  $R$  et que son ordonnée correspond à  $J$ .

**b)** Les points du carré dont l'ordonnée est strictement supérieure à l'abscisse sont les points situés à l'intérieur du triangle  $OKQ$  (voir figure ci-dessus).

Pour le point  $O$ , on a  $y_o - x_o < 15$ , donc  $O$  appartient à la partie de plan définie par  $y - x < 15$ . La partie  $P_1$  est la partie du carré comprise entre les droites d'équation  $y = x$  et  $y = x + 15$ .

Le choix d'un point de  $P_1$  correspond au cas où Roméo arrive le premier et attend moins de 15 minutes.

**c)** Voir graphique ci-dessus.

**d)** L'aire de la partie  $P_1 \cap P_2$  est égale à la différence entre l'aire du carré et les aires des deux triangles extérieurs à cette partie, soit

$$A = 60^2 - 2 \times \frac{45^2}{2} = 1575.$$

La probabilité cherchée est donc égale à  $p = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}$ .

**e)** La probabilité de l'événement « l'attente du premier arrivé dure moins de 15 minutes » est égale à  $\frac{7}{16} = 0,4375$ .

**59 1. a)**  $R(t) = e^{-\lambda t}.$

**b)** L'équation  $e^{-2000\lambda} = 0,8$  est équivalente à

$$\lambda = -\frac{\ln 0,8}{2000}. \text{ On a donc } \lambda \approx 0,000112.$$

c)  $E(X) = \frac{1}{\lambda} = -\frac{2000}{\ln 0,8} \approx 8962,84$ . La durée de vie moyenne de ce composant est égale à 8963 heures, résultat arrondi à l'heure près.

d)  $R(3000) = 0,716$ ; la probabilité que le composant soit fiable pendant au moins 3 000 h est 0,716.

2. a)  $P(T > t) = P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\}) = P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) = e^{-\lambda t} \times e^{-2\lambda t} = e^{-2\lambda t}$ .

b) On a  $P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-2\lambda t}$ . La variable  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $2\lambda$ ; elle a pour espérance  $E(T) = \frac{1}{2\lambda} \approx 4545$ .

c)  $P(T > 3000) = e^{-6000\lambda} \approx 0,517$ .

60 1. a)  $P(T < 120) = 1 - e^{-0,96} \approx 0,617$ ;  
 $P(T > 300) = e^{-2,4} \approx 0,091$ .

b) On a  $E(T) = \frac{1}{\mu} = 125$ , donc le temps moyen de passage en caisse dans ce magasin est 125 secondes soit 2 minutes et 5 secondes.

2. a) On a  $E(T') = \frac{1}{\lambda} = 150$ , d'où  $\lambda = \frac{1}{150}$ .

b) On a:  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{150 \cdot 0,008} = \frac{1}{1,2}$ , et le nombre moyen de clients dans le système est  $\frac{\rho}{1 - \rho} = 5$  (soit une personne en caisse et 4 personnes dans la file d'attente).

61 a)  $P(T < 15) = 1 - e^{-0,75} \approx 0,528$ .

b)  $E(Y) = \frac{1}{\mu} = 15$ , donc  $\mu = \frac{1}{15}$ ;

$P(Y > 20) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,264$ .

c) Le temps moyen passé par un patient chez le médecin est donc  $t = \frac{1}{\frac{1}{15} - \frac{1}{20}} = 60$  minutes.

62 1. a) ch9\_pb62.ods, feuille « professeur1 ».

b) Avec Alea()+\$A\$5, on obtient un nombre pris au hasard entre  $\lambda$  et  $1 + \lambda$ .

c) Le paramètre  $\lambda$  est un nombre compris strictement entre 0 et 1 car c'est la probabilité qu'un atome se désintègre pendant une unité de temps. On obtient donc dans B4 les nombres 0 ou 1. La probabilité d'obtenir 0 est égale à  $1 - \lambda$  et la probabilité d'obtenir 1 est  $\lambda$ .

d) Dans la cellule B5, on obtient un nombre 0 ou 1 si on a obtenu 0 dans la cellule B4, et la cellule B5 reste vide si on a obtenu 1 dans la cellule B4. De même que pour la cellule B4, si on a une valeur dans B5, la probabilité d'obtenir 0 est égale à  $1 - \lambda$  et la probabilité d'obtenir 1 est  $\lambda$ .

e) ch9\_pb62.ods, feuille « professeur1 »

f) Dans la cellule B2 on entre:

« =NB.SI(B4: B54; 0) ».

2. ch9\_pb62.ods, feuille « professeur1 »

3. a)  $P(T \geq 8) = 0,5 = e^{-8\lambda}$ ,

d'où  $\lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0,0866$ .

b) ch9\_pb62.ods, feuille « professeur2 »

Dans la cellule B2 on obtient la fréquence de l'événement «  $T = 1$  ».

Dans la cellule B3 on obtient la fréquence cumulée des événements «  $T = 1$  » et «  $T = 2$  », donc la fréquence de l'événement «  $T \leq 2$  ».

c) Dans C2 on entre: « = 1 - exp(A2\*ln(2)/8) ».

d) ch9\_pb62.ods, feuille « professeur2 »

En renouvelant la simulation, on constate que la courbe des fréquences cumulées simulées est « assez proche » de la courbe des probabilités cumulées obtenue avec la loi exponentielle (le « assez proche » doit aussi prendre en compte le fait que l'on a simulé le temps de vie de 25 atomes, ce qui est évidemment très peu).

63 a)  $P(8 - 0,012 \leq D \leq 8 + 0,012) = P(7,988 \leq D \leq 8,012) \approx 0,914$  à  $10^{-3}$  près.

b) On a:  $P(8 - 3\sigma \leq D \leq 8 + 3\sigma) \approx 0,997$  à  $10^{-3}$  près. Il suffit donc de choisir  $\sigma$  tel que  $3\sigma = 0,012$  soit  $\sigma = 0,004$ .

c)  $P(7,988 \leq D \leq 8,012) \approx 0,556$  à  $10^{-3}$  près.

64 1. a) On obtient 0 si et seulement si l'impulsion reçue (soit  $U + 4$ ) est inférieure à 2 V. Or,  $U + 4 \leq 2$  si et seulement si  $U \leq -2$ , d'où le résultat.

b)  $P(U \leq -2) = 0,5 - P(-2 \leq U \leq 0) = 0,002$  à  $10^{-3}$  près.

2. a)  $P(-2 \leq U \leq 2) = P(U \leq 2) - P(U \leq -2) = 1 - P(U \geq 2) - P(U \leq -2)$ ,

or  $U$  suit une loi normale d'espérance 0, donc par symétrie,  $P(U \geq 2) = P(U \leq -2)$ , ainsi  $P(-2 \leq U \leq 2) = 1 - 2P(U \leq -2)$ .

Par conséquent  $P(U \leq -2) < 0,0015$

si et seulement si  $P(-2 \leq U \leq 2) > 0,997$ .

b) On a:  $P(0 - 3\sigma \leq U \leq 0 + 3\sigma) \approx 0,997$  à  $10^{-3}$  près. Si  $\sigma$  vérifie  $3\sigma = 2$ , soit  $\sigma = \frac{2}{3}$ , alors

$P(-2 \leq U \leq 2) \approx 0,997$ . Pour atteindre l'objectif fixé, il suffit donc de choisir  $\sigma < \frac{2}{3}$ .

**65 1.**  $P(X > 4) = 0,5 - P(3 \leq X \leq 4) \approx 0,252$  à  $10^{-3}$  près.

**2. a)**  $P(X > a) = 0,15 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq a) = 0,15 \Leftrightarrow P(X \leq a) = 0,85$  ; on utilise alors la fonction inverse normale de la calculatrice et on trouve  $a \approx 4,55$  à  $10^{-2}$  près.

**b)** Si la société de HLM décide de ne faire des travaux qu'à partir de  $4,6^\circ$  perdus, elle devra faire des travaux dans environ 15 % de son parc immobilier.

**66 1. a)** On répète 40 fois l'expérience suivante : on tire au hasard (tirage assimilé à un tirage avec remise) le nom d'un salarié de l'entreprise. Il y a deux issues possibles : le salarié a effectué un stage avec une probabilité de 0,2 (succès) ou non (échec). La variable  $Y$  prend pour valeurs le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli,  $Y$  suit donc une loi binomiale de paramètres 40 et 0,2.


**b)**  $P(Y \leq 7) \approx 0,437$  à  $10^{-3}$  près.

**2. a)** Ces paramètres sont l'espérance et l'écart type de  $Y$  ( $E(Y) = 40 \times 0,2 = 8$  et

$$\sigma(Y) = \sqrt{40 \times 0,2 \times 0,8} \approx 2,53).$$

**b)**  $P(Z \leq 7) \approx 0,346$  à  $10^{-3}$  près.

**c)**  $P(Z \leq 7,5) \approx 0,422$  à  $10^{-3}$  près.  $P(Y \leq 7)$  est mieux approximé par  $P(Y \leq 7,5)$ .

**3. a)**  ch9\_pb66.ods

**b)**  $Y$  prend pour valeurs les entiers compris entre 0 et 40.

**c) d)**  ch9\_pb66.ods

**e)** La meilleure approximation de  $P(Y \leq k)$  est  $P(Z \leq k + 0,5)$ , la correction de continuité est donc efficace dans ce cas.

**67 1.**  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 1500$  et  $p = 0,02$ , donc  $np = 30$  et  $n(1 - p) = 1470$ , par conséquent  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $n(1 - p) \geq 5$ , la loi de  $Y$  peut être approximée par la loi normale d'espérance  $np = 30$  et d'écart type  $\sqrt{np(1 - p)} \approx 5,42$  à  $10^{-2}$  près.

**2. a)**  $P(Z \leq 20,5) = 0,5 - P(20,5 \leq Z \leq 30) \approx 0,0398$  à  $10^{-4}$  près.

**b)**  $P(14,5 \leq Z \leq 45,5) \approx 0,9958$ .

**c)** La probabilité qu'il y ait entre 15 et 45 composants défectueux est de 0,9958.

## Vers le Bac

**68 1. c) 2. c) 3. a) 4. b) 5. b)**

**69 1.**  $P(T > 1000) = 1 - P(T \leq 1000) = e^{-0,0011 \times 1000} = e^{-1,1} \approx 0,333$

à  $10^{-3}$  près.

**2.**  $\lambda_2 = \frac{1}{1250} = 0,0008$ .

**3.** On cherche  $t$  tel que  $P(T \leq t) = 0,7$  c'est-à-dire  $1 - e^{-0,0011t} = 0,7$ ; on trouve  $t = -\frac{\ln 0,3}{0,0011} \approx 1095$  h

à l'heure près.

**4.** Pour tout réel  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= 1 - P(T > t) \\ &= 1 - P(\{T_1 \geq t\} \cap \{T_2 \geq t\}) \\ &= 1 - P(\{T_1 \geq t\}) \times P(\{T_2 \geq t\}) \\ &= 1 - e^{-0,0011t} e^{-0,0008t} = 1 - e^{-0,0019t}. \end{aligned}$$

Donc  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre 0,0019 et le temps moyen de bon fonctionnement d'un système  $S$  est de  $\frac{1}{0,0019} \approx 526$  h à l'heure près.

**70 1.**  $P(X \leq 14) \approx 0,091$  à  $10^{-3}$  près.

**2.**  $P(X \geq 18) \approx 0,748$  à  $10^{-3}$  près.

**3.** Il suffit de prendre  $h = 2\sigma = 12$ . On peut alors dire que la probabilité pour que l'autonomie « en parole » de la batterie soit comprise entre 10 h et 34 h est environ égale à 0,95.

**4.** Il suffit de prendre  $\sigma$  tel que  $3\sigma = 1$  soit

$$\sigma = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

**71 A 1. a)** Avec la commande « nombrealeatoire+L », on obtient un nombre aléatoire compris entre L et L + 1.

**b)** Avec la commande « Ent(nombrealeatoire+L) », on obtient 0 avec la probabilité  $1 - L$  et 1 avec la probabilité  $L$ .

**2. a)** Ce sont les durées de vie de chacun des 5 atomes « simulés ».

**b)** 45 ans.

**B a)**  $P(T \leq 30) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-30\lambda} = 0,5$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,5}{30} \approx 0,023 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

**b)**  $E(T) = \frac{1}{\lambda} \approx 43,3$  à  $10^{-1}$  près; la durée de vie moyenne d'un atome de césium 137 est d'environ 43,3 ans.

**72 1.** On répète 200 fois de façon identique et indépendante l'épreuve « on prend une pièce au hasard ». Il y a deux issues possibles : le succès  $S$  : « la pièce est de qualité médiocre » de probabilité  $p = \frac{t}{100}$  et l'échec  $\bar{S}$  : « la pièce n'est pas de qualité médiocre » de probabilité  $1 - p = 1 - \frac{t}{100}$ .  $X$  compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli donc  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 200$  et  $p = \frac{t}{100}$ .

**2. a)**  $P(X \leq 5) \approx 0,06$  à  $10^{-2}$  près.

**b)**  $E(X) = 200 \times 0,05 = 10$  et

$\sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,05 \times (1 - 0,05)} \approx 3,1$  à  $10^{-1}$  près, d'où le choix des paramètres.

**c)**  $P(Y \leq 5) \approx 0,05$  à  $10^{-2}$  près.

**d)** Il suffit de prendre  $a = 2\sigma = 6,2$ .

**3. a)**  $m' = 200p$  et  $\sigma' = \sqrt{200p(1 - p)}$ .

**b)** On résout  $2\sigma' = 5$  ce qui revient à résoudre l'équation  $32p^2 - 32p + 1 = 0$  avec  $0 \leq p \leq 1$ . On trouve  $p = 0,03$  à  $10^{-2}$  près. L'autre solution trouvée correspond à  $1 - p \approx 0,97$  à  $10^{-2}$  près. Il y a alors en moyenne  $200 \times 0,03 = 6$  pièces de qualité médiocre par lot.

# 10

## Prise de décision et estimation

### Activités

#### Activité 1 Santé publique et intervalle de fluctuation

La situation étudiée ici est inspirée de la situation connue par la ville de Woburn aux États-Unis dans les années 1970. Dans certains quartiers de cette ville, on s'était aperçu qu'il y avait un taux de leucémies infantiles plus élevé que le taux sur l'ensemble du pays. La question était de savoir si ce taux était « anormalement » plus élevé ou non.

C'est le travail qui est proposé dans cette activité. Quelle fluctuation de la fréquence d'un événement sur des échantillons de taille fixée peut-on considérer comme « normale » ? Pour la ville de Woburn, après avoir montré que le taux de leucémies infantiles était anormalement élevé, on a finalement découvert que la pollution de l'eau en était la cause.

Le problème de la fluctuation des fréquences sur des échantillons a déjà été abordé en Seconde et en Première. On introduit ici l'intervalle de fluctuation lié à la loi normale étudiée au chapitre précédent et très utilisé dans les matières techniques.

**A 1**  ch10\_act1\_ods

**2 a)** Avec cette commande, on obtient un nombre réel pris au hasard entre 0,00327 et 1,00327.

**b)** Dans B5, on peut obtenir 0 ou 1.

La probabilité d'obtenir 0 est la longueur de l'intervalle  $[0,00327; 1[$ , soit  $1 - 0,00327 = 0,99673$ .

La probabilité d'obtenir 1 est la longueur de l'intervalle  $[1; 1,00327[$ , soit 0,00327.

**3 a)** Dans B2, on entre : =NB.SI(B5:B2004; 1)/2000.

**b)** Dans A1, on obtient le nombre d'échantillons présentant une fréquence de 1 supérieure ou égale à 0,0065. On simule ainsi 100 échantillons de 2000 enfants et on compte le nombre d'échantillons ayant une fréquence d'enfants atteints de la maladie M supérieure ou égale à celle dans la ville.

**4** On peut estimer ce pourcentage autour de 1 %.

**B 1** On répète 2000 fois de façon identique et indépendante la même expérience : « choisir un enfant et voir s'il est atteint de maladie M ». L'expérience a deux issues : soit l'enfant est atteint, issue de probabilité  $p = 0,00327$ , soit il ne l'est pas. La variable  $X$  qui donne le nombre d'enfants atteints suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 2000$  et  $p = 0,00327$ .

**2** On vérifie les critères concernant l'approximation de la loi binomiale par la loi normale :  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $np(1 - p) \geq 5$ .

- 3 a)** On a  $\mu' = \frac{np}{n} = p$  et  $\sigma' = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  avec  $\sigma' \approx 0,00128$ .
- b)** D'après les propriétés de la loi normale,  $P(\mu' - 2\sigma' \leq F \leq \mu' + 2\sigma') \approx 0,95$  à  $10^{-2}$  près.
- c)**  $P(\mu' - 2\sigma' \leq F \leq \mu' + 2\sigma') = P(0,00071 \leq F \leq 0,00583) \approx 0,9545$  à  $10^{-5}$  près et  $P(\mu' - 1,96\sigma' \leq F \leq \mu' + 1,96\sigma') = P(0,0007612 \leq F \leq 0,0057788) \approx 0,95$  à  $10^{-5}$  près. C'est donc  $P(\mu' - 1,96\sigma' \leq F \leq \mu' + 1,96\sigma')$  qui est l'approximation la plus proche de 0,95.
- d)** On déduit du résultat précédente que la probabilité que la fréquence d'enfants atteints soit comprise entre  $p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  et  $p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  est égale à 0,95 à  $10^{-5}$  près, donc que 95 % des échantillons

de taille 2 000 ont une fréquence d'enfants atteints comprise dans l'intervalle  $I$ .

Ici  $I = [0,00076; 0,00578]$ . Comme 0,0065 n'appartient pas à cet intervalle, on en conclut, avec un risque de 5 % d'erreur (il y a une probabilité de 0,05 qu'un échantillon pris au hasard ait sa fréquence en dehors de l'intervalle  $I$ ), qu'il est raisonnable de chercher une autre cause au taux d'enfants atteints dans la ville étudiée.

## Activité 2 Faut-il faire confiance aux sondages ?

L'objectif de cette activité est d'aborder la notion d'intervalle de confiance. On travaille ici sur un intervalle obtenu à partir de l'intervalle de fluctuation étudié en Seconde. À partir de cet intervalle de fluctuation, on peut obtenir simplement un intervalle de confiance, ce qui n'est pas le cas en partant de l'intervalle de fluctuation asymptotique (on a sensibilisé les élèves à cette démarche en Seconde). On cherche ici à faire comprendre aux élèves ce qu'est un intervalle de confiance, et la différence entre intervalle de fluctuation et intervalle de confiance. L'intervalle de fluctuation est calculé à partir de la proportion  $p$  connue ou supposée sur la population et donne un intervalle de valeurs dans lequel se trouvent 95 % des fréquences obtenues sur les échantillons. L'intervalle de confiance se calcule à partir de la fréquence d'un échantillon, et permet d'estimer avec un certain niveau de confiance, la proportion  $p$  inconnue sur la population. On propose ici un graphique donnant 100 intervalles obtenus à partir de 100 échantillons et on veut faire comprendre aux élèves que la proportion inconnue  $p$  se trouve dans environ 95 % de ces intervalles.

**1 a)**  $p - \frac{1}{\sqrt{1000}} \leq f$  équivaut à  $p \leq f + \frac{1}{\sqrt{1000}}$  et  $f \leq p + \frac{1}{\sqrt{1000}}$  équivaut à  $p \geq f - \frac{1}{\sqrt{1000}}$ .

D'où l'équivalence demandée.

**b)** L'intervalle de confiance de  $p$  au niveau de 95 % est  $[0,46; 0,53]$ . On ne peut pas affirmer que  $p$  appartient à cet intervalle. On peut dire que 95 % des sondages fournissent des intervalles contenant  $p$ . On ne peut pas parler de probabilité, car  $p$  n'est pas une valeur aléatoire et l'intervalle de confiance, une fois le sondage fait, est fixé.

**2 a)** La valeur 0,53 appartient à 95 % des intervalles.

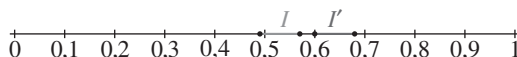
La valeur 0,5 appartient à 56 des intervalles, ce qui est très en dessous des 95 attendus. On ne peut pas, au niveau de confiance de 95 % prendre 0,5 pour valeur estimée de  $p$ .

**b)** On ne peut pas prendre 0,494 comme valeur estimée de  $p$  au niveau de confiance de 95 %. L'intervalle de confiance obtenu par le premier sondage fait partie des 5 intervalles ne contenant pas la valeur 0,53.

## TP 1 Discrimination à l'embauche

Dans ce TP, on étudie les résultats de sondages sur la perception de la discrimination au travail dans le secteur public et dans le secteur privé. On dégage une méthode de comparaison de deux proportions du même caractère dans deux populations (ici, les salariés du secteur privé et les salariés du secteur public). On applique ensuite cette règle pour tirer des conclusions sur d'autres sondages.

- 1 a) En arrondissant les bornes de  $I$  à  $10^{-2}$  près, on obtient  $I = [0,49 ; 0,57]$ .
  - b) Affirmation A : Fausse. On ne peut conclure aucun résultat absolu d'un intervalle de confiance. On ne peut que conclure que, au niveau de confiance de 95 %, on peut estimer  $p$  entre 49 % et 57 %.
- Affirmation B : Vraie par définition d'un intervalle de confiance.
- 2 a) En arrondissant les bornes de  $I'$  à  $10^{-2}$  près, on obtient  $I' = [0,6 ; 0,68]$ .
  - b) La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



- c) Les intervalles  $I$  et  $I'$  sont disjoints.
  - d) On peut en conclure que la différence des fréquences obtenues dans les sondages est significative au niveau de confiance de 95 %. On peut également dire que la perception du handicap comme élément discriminant à l'embauche est différente dans le secteur public et dans le secteur privé au niveau de confiance de 95 %.
- 3 a) En arrondissant les bornes de  $I''$  à  $10^{-2}$  près, on obtient  $I'' = [0,58 ; 0,66]$ .
  - b) Les intervalles  $I$  et  $I''$  sont disjoints. On peut conclure, au niveau de confiance de 95 %, que la perception du handicap comme élément discriminant a significativement évolué entre 2008 et 2009.
  - 4 Soit  $p_1$  la proportion des salariés du secteur privé considérant en 2008 que le fait d'avoir moins de 25 ans est un élément de discrimination positive. L'intervalle de confiance de  $p_1$  obtenu d'après le sondage effectué sur 603 salariés est  $I_1 = [0,29 ; 0,37]$ , les bornes étant arrondies à  $10^{-2}$  près.
- Soit  $p_2$  la proportion des salariés du secteur privé considérant en 2009 que le fait d'avoir moins de 25 ans est un élément de discrimination positive. L'intervalle de confiance de  $p_2$  obtenu d'après le sondage effectué sur 500 salariés est  $I_2 = [0,27 ; 0,35]$ , les bornes étant arrondies à  $10^{-2}$  près.
- Les deux intervalles ne sont pas disjoints. On ne peut donc pas dire que les fréquences obtenues lors de ces deux sondages (0,31 et 0,33) sont significativement différentes au niveau de confiance de 95 %. On ne peut pas conclure que la perception des salariés du privé a significativement évolué pour la discrimination positive des moins de 25 ans.


## TP 2 Moyenne sous surveillance

Dans ce TP, on s'initie à l'intervalle de confiance d'une moyenne. On voit ainsi comment on peut utiliser cette notion pour définir un protocole de surveillance d'une production.

- A 1  $P(11,4 \leq D \leq 12,6) \approx 0,997$  arrondi à  $10^{-3}$  près. On a donc un taux de rebus de 0,3 % pour la production étudiée.
- 2 a)  $I = [11,735 ; 12,085]$ .
- b) La valeur  $m = 12$  est compatible, au niveau de confiance 95 %, avec l'intervalle de confiance obtenu suite à ce prélèvement.
- 3 a)  $I = [11,645 ; 11,995]$ .



b) La valeur  $m = 12$  n'est pas compatible, au niveau de confiance 95 %, avec l'intervalle de confiance obtenu suite à ce prélèvement. Au niveau de confiance de 95 %, on doit rejeter l'hypothèse que  $m = 12$ .

**B 1 a)**  ch10\_tp2.ods

b) On obtient un nombre aléatoire compris entre  $\frac{m}{12} - \frac{\sigma}{2}$  et  $\frac{m}{12} + \frac{\sigma}{2}$ .

c) La valeur obtenue dans la cellule M6 correspond à la dimension d'une pièce prise au hasard, puisqu'on simule la loi normale de paramètres  $(m, \sigma)$  en additionnant les valeurs prises par 12 variables aléatoires

suivant chacune la loi uniforme sur l'intervalle  $\left[ \frac{m}{12} - \frac{\sigma}{2}; \frac{m}{12} + \frac{\sigma}{2} \right]$ .

**2 a)** Dans la cellule N6, on entre: =MOYENNE(D6:D10).

b) Dans la cellule O6, on entre: =N6-1.96\*\$O\$3/RACINE(5).

c) Dans la cellule P6, on entre: =N6+1.96\*\$O\$3/RACINE(5).

d) Dans la cellule Q6, on obtient « oui » si 12 appartient à l'intervalle de confiance obtenu sur l'échantillon de 5 pièces dont les dimensions figurent dans les cellules M6 à M10, « non » dans le cas contraire.

**3 a)** On obtient 500 lignes, soit 100 échantillons de 5 pièces et les 100 intervalles de confiance correspondants.

b) Dans la cellule R6, on entre: « =NB.SI(Q6:Q505;"oui")/100 ».

c) On obtient qu'environ 95 % des intervalles de confiance contiennent 12.

**4 b)** On obtient une fréquence d'environ 0,8.

c) Sur le graphique, sept intervalles de confiance contiennent la valeur 12. Au niveau de confiance de 95 %, on doit rejeter l'hypothèse que la moyenne est encore égale à 12.

## Exercices

**2**  $I = [0,0279; 0,0521]$ .

**4 a)**  $I = [0,6; 0,74]$ .

b) La fréquence de l'échantillon est 0,62. Au seuil de 95 %, la proportion de 0,67 est compatible avec le résultat du sondage.

**6** L'hypothèse faite par le responsable politique est que la proportion  $p$  d'opinions favorable est  $p = 0,84$ . Avec  $n = 120$  et  $p = 0,84$ , les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont vérifiées. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de taille 120 est  $[0,77; 0,91]$  (bornes arrondies à  $10^{-2}$  près). Dans l'échantillon interrogé par l'opposant, la fréquence de réponses favorables est 0,79. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation précédent. Au seuil de 95 %, l'hypothèse sur  $p$  est compatible avec la fréquence obtenue. L'opposant ne peut pas utiliser ce sondage pour contester l'affirmation du responsable politique.

**7** L'hypothèse faite par la compagnie d'assurance est que la proportion  $p$  sur l'ensemble des véhicules assurés est 0,83. Avec  $n = 100$  et

$p = 0,83$ , les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont vérifiées. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de taille 100 est  $[0,756; 0,904]$  (bornes arrondies à  $10^{-3}$  près). La fréquence obtenue sur l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation précédent. Au seuil de 95 %, l'hypothèse sur  $p$  est compatible avec la fréquence obtenue.

**8 1.** Cet algorithme sert à tester si les valeurs de  $N$  et  $P$  vérifient les conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation.

**2. a)**  ch10\_ex8.alg

b) Pour  $N = 1001$  et  $P = 0,08$ , l'intervalle de fluctuation est  $[0,0632; 0,0968]$ .

Pour  $N = 100$  et  $P = 0,03$ , l'algorithme affiche « non valide ».

**10 1. a)**  $L_n = 3,92 \sqrt{\frac{0,2475}{n}}$ .

b) L'inéquation  $L_n \leq 0,04$  est équivalente à  $n \geq 2376,99$ . Le plus petit entier solution de l'inéquation est donc 2377.

**2.** On cherche à avoir un intervalle de fluctuation d'amplitude 0,04, donc d'après la question 1 il faut des groupes d'au moins 2377 individus.



**12**  $I = [0,026; 0,062]$ .


**14 a)**  $I = [0,023; 0,227]$ .

**b)** Cet argument est exagéré. Le nombre 0,23 n'appartient pas à l'intervalle de confiance donc l'hypothèse donnant 23 % de flacons mal remplis sur l'ensemble de la production n'est pas compatible, au niveau de confiance de 95 %, avec la fréquence obtenue dans l'enquête réalisée.


**15 1.** Si le service est complet toute l'année, il faut 780 traitements par an.

**2. a)**  $I = [0,14; 0,36]$  (bornes arrondies à  $10^{-3}$  près).

**b)** La proportion de traitements pour la maladie M choisie par le gestionnaire est  $\frac{281}{780} \approx 0,360$  à  $10^{-3}$  près donc, au niveau de confiance de 95 %, on peut considérer qu'il y aura suffisamment de traitements contre la maladie M.


**16 a)**  ch10\_ex16.alg

**b)** Pour  $N = 150$  et  $f = 0,27$ , on obtient  $I = [0,199; 0,341]$  (bornes arrondies à  $10^{-3}$  près). Pour  $N = 100$  et  $f = 0,13$ , on obtient  $I = [0,064; 0,196]$  (bornes arrondies à  $10^{-3}$  près).


**17 1. a)**  ch10\_ex17.ods

**b)** Dans B3, on entre :  
= B5-1,96\*RACINE(B5\*(1-B5)/\$B\$1).


Dans B4, on entre :  
= B5+1,96\*RACINE(B5\*(1-B5)/\$B\$1).

**c)**  ch10\_ex17.ods, feuille « professeur ».

**2. a)** Les valeurs de  $p$  entre 0,45 et 0,65 appartiennent aux 10 intervalles.

**b)**  ch10\_ex17.ods, feuille « n = 50 ». Pour les élèves bien sûr, il est inutile de refaire une feuille de calcul, il suffit de changer la valeur dans la cellule B1.

On peut prendre  $p$  entre 0,5 et 0,6.

**3.**  ch10\_ex17.ods, feuille « n=100 », puis feuille « n=200 ».

On constate que, pour une fréquence constante, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente.

**18 1.** Si le laboratoire n'a pas testé toute la population, la fréquence de personnes porteuses sur un échantillon est susceptible de fluctuer. On ne peut évaluer la proportion  $p$  (par un intervalle de confiance) que si l'on connaît la taille de l'échantillon testé.

**2. a)**  $L_n = 3,92\sqrt{\frac{0,1204}{n}}$ .

**b)** L'inéquation  $L_n \leq 0,06$  est équivalente à  $n \geq 0,1204\left(\frac{196}{3}\right)^2$ .

Les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 514.

**c)** Si le laboratoire donne cette proportion comme une estimation à 0,03 près, cela signifie que l'intervalle de confiance a une longueur de 0,06 donc que le nombre minimal de personnes testées est 514.

**3.** Si le laboratoire donne cette proportion comme une estimation à 0,01 près, cela signifie que l'intervalle de confiance a une amplitude de 0,02. Or, le plus petit entier  $n$  tel que  $L_n \leq 0,02$  est 4626. Le laboratoire a donc testé au minimum 4626 personnes.

**19 1. a)**  $L_n = 3,92\sqrt{\frac{0,0651}{n}}$ .

**b)** L'inéquation  $L_n \leq 0,06$  est équivalente à  $n \geq 0,0651\left(\frac{196}{3}\right)^2$ .

Les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 278.

**c)** Si le taux de satisfaction est donné comme une estimation à 0,03 près, cela signifie que l'intervalle de confiance a une longueur de 0,06 donc que le nombre minimal de personnes interrogées est 278.

**3.** Si le taux de satisfaction est donné comme une estimation à 0,01 près, cela signifie que l'intervalle de confiance a une amplitude de 0,02. Or, le plus petit entier  $n$  tel que  $L_n \leq 0,02$  est 2501. Le nombre de personnes interrogées est donc au minimum 2501.

**21 a)** L'intervalle de confiance de  $p$  est  $I = [0,1561; 0,2039]$ .

L'intervalle de confiance de  $p'$  est

$I' = [0,1184; 0,1616]$ .

**b)** La proportion 0,158 appartient à  $I$ , donc ce résultat est compatible avec le résultat du sondage. La proportion 0,161 appartient à  $I'$ , donc ce résultat est compatible avec le résultat du sondage. Les intervalles de confiance  $I$  et  $I'$  ne sont pas disjoints, on ne pouvait pas conclure qu'il y avait une différence significative entre les fréquences obtenues lors de ce sondage.

**22 a)**  $I = [0,267; 0,333]$ .

**b)**  $I' = [0,345; 0,415]$ .

c) Au niveau de confiance 95 %, les fréquences obtenues lors des deux sondages ont une différence significative car les intervalles  $I$  et  $I'$  sont disjoints. On peut en conclure que la campagne publicitaire a été efficace.

**23** Soit  $p$  la proportion des habitants de la première ville qui se déclarent intéressés par l'ouverture du magasin. L'intervalle de confiance de  $p$  au niveau de confiance 95 % obtenu à partir de ce sondage est  $I = [0,1896; 0,2604]$  (bornes arrondies à  $10^{-4}$  près).

Soit  $p'$  la proportion des habitants de la deuxième ville qui se déclarent intéressés par l'ouverture du magasin. L'intervalle de confiance de  $p'$  au niveau de confiance 95 % obtenu à partir de ce sondage est  $I' = [0,2315; 0,3085]$  (bornes arrondies à  $10^{-4}$  près).

Les intervalles  $I$  et  $I'$  ne sont pas disjoints. On conclut qu'au niveau de confiance de 95 % les proportions  $p$  et  $p'$  ne sont pas différentes.

**24 a)** Pour le premier sondage:  $I = [0,4912; 0,6288]$  et pour le deuxième  $I' = [0,6153; 0,7447]$ .

**b)** Au niveau de confiance 95 %, on peut estimer  $p$  entre 49,12 % et 62,88 % et  $p'$  entre 61,53 % et 74,47 %. On ne peut pas en conclure que l'une des deux marques est préférée.

**c)** Si on avait les mêmes résultats en faisant un sondage sur 500 personnes, on aurait  $I = [0,5165; 0,6035]$  et  $I' = [0,6391; 0,7209]$ . Au niveau de confiance 95 %, on peut dire qu'il y a alors au maximum 60,35 % de personnes qui apprécient le goût de la crème A et au minimum 63,91 % qui apprécient le goût de la crème B.

**26 a)**  $I = [10,103; 10,657]$ .

**b)** On ne peut pas affirmer que  $r$  appartient à l'intervalle  $I$ . On peut seulement affirmer que, sur un grand nombre de prélèvement, 95 % des intervalles de confiance contiennent  $r$ .

**c)** Au niveau de confiance 95 %, on peut dire que la moyenne  $r$  est supérieure ou égale à 10,103, donc strictement supérieure à 10. On peut donc considérer que les jouets produits sont assez solides.

*Remarque : On peut amener les élèves à préciser davantage leur réponse. Si on prend pour  $r$  la valeur minimale,  $P(R > 10) = 0,54$  et si on prend pour  $r$  la valeur maximale,  $P(R > 10) = 0,74$ . Au seuil de confiance de 95 %, on peut dire que entre 54 % et 74 % des jouets produits sont assez solides... ce qui n'est pas tellement satisfaisant.*

## Problèmes

**28 1. a)**  $I = [0,175; 0,225]$ .

**b)** La longueur de l'intervalle de confiance est 0,05.

**c)**  $k = 2,5$ .

**2. a)** Si l'effectif est 1000 et le pourcentage obtenu 20 %, la marge d'erreur est 2,5 %, donc l'intervalle de confiance de la proportion  $p$  testée par le sondage est  $[0,2 - 0,025; 0,2 + 0,025]$ , soit l'intervalle  $I$  obtenu à la question **1. a)**.

*Remarque : on peut demander aux élèves d'expliquer pourquoi la marge d'erreur est la même si le pourcentage obtenu est 20 % ou 80 %.*

**b)** Le tableau donne les marges d'erreurs, en fonction de la taille de l'échantillon et de la fréquence obtenue, donc permet de retrouver l'intervalle de confiance au niveau de 95 %.

**c)** On obtient bien un intervalle de confiance au niveau de 95 %, à condition que l'on comprenne le lien entre la marge d'erreur et l'intervalle de confiance. L'expression « 95 % de chance » est néanmoins inadaptée: il n'y a pas de « chance », ni de probabilité: la proportion  $p$  est, ou n'est pas, dans l'intervalle de confiance. Ce que l'on peut dire c'est que 95 % des échantillons de 1000 personnes donnent un intervalle de confiance contenant  $p$ .

**d)** Si la fréquence obtenue est 0,35 avec un sondage sur 500 personnes, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est  $I = [0,308; 0,392]$ . La longueur de cet intervalle est 0,084, soit une marge d'erreur de 4,2 %.

**3. a)**  $I = [0,082; 0,118]$

**b)** Dans l'intervalle précédent, la marge d'erreur est 1,8. Pour pouvoir affirmer que le pourcentage est 10 % avec une marge d'erreur de 0,9, il faut avoir ce résultat avec un échantillon de 4000 personnes.

*Remarque : on peut faire réfléchir les élèves sur cette question : pour avoir un taux d'erreur divisé par 2 (en supposant qu'on obtienne la même fréquence sur deux sondages), il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4 : est-ce un résultat général ? Pourquoi ?*

**4. a)** Avec un échantillon de 1000 personnes et une fréquence de vote pour A de 51,5 %, l'intervalle de confiance au niveau 95 % est  $I = [0,484; 0,546]$ ; la marge d'erreur est 3,1 %. Au niveau de confiance 95 %, la proportion  $p$  de personnes

votant pour A peut donc être inférieure à 50 %, l'élection n'est donc pas jouée (même si les gens ne changent pas d'opinion d'ici le vote).

**b)** Avec un échantillon de 1 000 personnes et une fréquence de vote pour A de 55 %, l'intervalle de confiance au niveau 95 % est  $I = [0,519; 0,581]$ ; la marge d'erreur est 3,1 %. Au niveau de confiance 95 %, la proportion  $p$  de personnes votant pour A est supérieure à 50 % : on peut dire que l'écart entre les deux candidats est significatif (bien sûr à condition que les gens ne changent pas d'avis entre le moment du sondage et le moment du vote).

**29 1. a)**  $I = [0,8737; 0,9263]$ .

**b)** Pour 95 % des vols, la fréquence maximale de passagers qui embarquent est 0,9263, le nombre maximal de personnes qui embarquent est 463.

**c)** Pour 520 réservations effectuées, l'intervalle de fluctuation est  $I = [0,8742; 0,9258]$ .

Le nombre maximal de personnes qui se présentent à l'embarquement est alors 481.

$$\begin{aligned} \mathbf{2. a)} \quad I &= \left[ 0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,09}{n}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,09}{n}} \right] \\ &= \left[ 0,9 - \frac{0,588}{\sqrt{n}}; 0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

**b)** La proportion maximale de personnes qui se présentent à l'embarquement, pour 95 % des vols, est  $0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}}$ , d'où le résultat proposé.

**c)** La condition se traduit par

$$\left( 0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right) n \leq 500, \text{ inéquation équivalente}$$

$$\text{à } 0,9n + 0,588\sqrt{n} - 500 \leq 0.$$

**d)** Les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $0,9x^2 + 0,588x - 500 = 0$  sont

$$x_1 = \frac{-0,588 - \sqrt{1800,345744}}{1,8} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-0,588 + \sqrt{1800,345744}}{1,8}.$$

L'intervalle de solutions de l'inéquation sur  $[0; +\infty[$  est  $[0; x_2]$ , soit, avec les bornes arrondies à  $10^{-3}$  près :  $[0; 23,246]$ .

En posant  $x = \sqrt{n}$ , on passe de l'inéquation posée au **c)** à l'inéquation résolue ci-dessus. Il faut donc prendre  $\sqrt{n} \leq 23,246$ , soit  $n \leq 540$ . Les solutions cherchées sont donc les entiers compris entre 501 et 540.

**e)** On déduit de la question précédente que le nombre maximum de billets que l'on peut vendre pour que, dans au moins 95 % des cas, il n'y ait pas plus de passagers à l'embarquement que de places disponibles est  $n_{\max} = 540$ .

**30 1.** L'inégalité  $np \geq 5$  équivaut ici à

$$p \geq \frac{5}{1000} \text{ soit } p \geq 0,005 \text{ et l'inégalité}$$

$$n(1-p) \geq 5 \text{ équivaut ici à } 1-p \geq \frac{5}{1000},$$

$$\text{soit } p \leq 0,995.$$

**2.**  ch10\_pb30.ods

**3. a)** La commande ALEA()+ $p$  renvoi un nombre au hasard dans l'intervalle  $[p; 1+p]$ .

**b)** On obtient 0 ou 1.

La probabilité d'obtenir 0 correspond à la probabilité d'obtenir un nombre de l'intervalle  $[p; 1[$  suivant la loi uniforme sur  $[p; 1+p]$  et est donc égale à  $1-p$ .

La probabilité d'obtenir 1 correspond à la probabilité d'obtenir un nombre de l'intervalle  $[1; 1+p]$  suivant la loi uniforme sur  $[p; 1+p]$  et est donc égale à  $p$ .

**4. a)** On entre : « =NB.SI(B9:B1008;1)/1 000 ».

**b)**  ch10\_pb30.ods

**c)** Si on obtient « oui » dans B4, cela signifie que la proportion  $p$  appartient à l'intervalle de confiance au niveau 95 % correspondant à l'échantillon simulé par la plage B9 : B1008. Si l'on obtient « non », c'est que  $p$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance.

**d)**  ch10\_pb30.ods

**e)** On entre dans B2 : « =NB.SI(B4:CW4;“oui”) ».

**5. a)**  ch10\_pb30.ods

**b) c)** La valeur de  $p$  est une valeur appartenant à environ 95 % (le pourcentage correspondant à la simulation s'affiche en B2) des intervalles.

**31** À partir du sondage, on obtient pour intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion  $p$  des habitants ayant l'intention de voter pour A :  $I = [0,1496; 0,1964]$  (bornes arrondies à  $10^{-4}$  près). Après le vote, on peut dire que  $p = 0,195$ ; ce nombre appartient à l'intervalle  $I$ , donc est compatible avec le résultat du sondage. On peut vérifier de même que pour le candidat B ( $I_B = [0,1924; 0,2436]$ ), l'intervalle de confiance issu du sondage est compatible avec le résultat de l'élection et également pour le candidat C ( $I_C = [0,1666; 0,2154]$ ).

**32 1.**  $P(8,15 \leq D \leq 8,51) = 0,954$ . Donc, la probabilité qu'une gaine soit de qualité médiocre est  $p = 0,046$ .

**2. a)**  $I = [0,022; 0,07]$ .

**b)** D'après la question **a)**, 95 % des lots de 300 pièces prises au hasard ont un taux de gains de qualité médiocre appartenant à l'intervalle  $I$ , donc au maximum 7 % de gains de qualité médiocre.

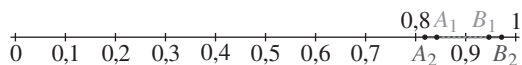
**3. a)** L'intervalle de confiance de la moyenne  $\mu$  est  $[8,154; 8,266]$ .

**b)** La moyenne  $m$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance de  $\mu$ . Au niveau de confiance de 95 %, on peut dire que la production s'est déréglée.

**33 1. a)**  $I_1 = [0,841; 0,959]$ .

**b)**  $I_2 = [0,823; 0,977]$ .

**c)**



**d)** La fréquence 0,84 n'appartient pas à  $I_1$  : au seuil de 95 %, cette fréquence n'est pas compatible avec la garantie énoncée par Développix. La fréquence 0,84 appartient à  $I_2$  : au seuil de 99 % cette fréquence est compatible avec la garantie énoncée par Développix.

*Remarque : On peut alors sensibiliser les élèves sur le sens de ce seuil de confiance. Le seuil de 99 % signifie que l'on a une probabilité de 0,01 de se tromper si l'on rejette l'hypothèse  $p = 0,9$  ; cela ne signifie pas que la probabilité que  $p = 0,9$  est égale à 0,99.*

*On ne peut pas rejeter l'hypothèse  $p = 0,9$  avec un risque d'erreur de 1 %, par contre on peut rejeter l'hypothèse  $p = 0,9$  avec un risque d'erreur de 5 %.*

**2. \*** La proportion 0,9 n'est pas compatible, au seuil de confiance de 95 % avec les intervalles de confiances obtenus par les 50 prélèvements.

\* Au seuil de confiance de 95 %, la valeur  $p' = 0,85$  est compatible avec les 50 échantillons prélevés.

\* Deux intervalles de confiance d'une même proportion inconnue  $p$  peuvent être disjoints (on sait qu'on a environ 95 % des intervalles qui contiennent la proportion). Ici on le constate sur les intervalles n° 46 et 47.

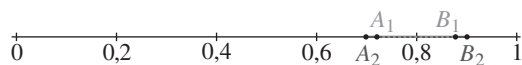
**34 a)**  $I_1 = [0,722; 0,878]$ .

Au seuil de confiance de 95 %, on peut dire qu'il y a entre 72,2 % et 87,8 % de rails conformes.

**b)**  $I_2 = [0,697; 0,903]$ .

Au seuil de confiance de 99 %, on peut dire qu'il y a entre 69,7 % et 90,3 % de rails conformes.

**c)**



**d)** Soit  $p'$  la proportion de rails conformes fournis par Saroule. L'intervalle de confiance de  $p'$ , obtenu à partir de l'échantillon, au niveau de confiance de 95 % est  $I'_1 = [0,88; 0,98]$ . Les intervalles  $I_1$  et  $I'_1$  sont disjoints. On conclut qu'au niveau de confiance 95 %, il y a une différence significative entre  $p$  et  $p'$ . Au niveau de confiance 99 %, l'intervalle de confiance de  $p'$  est  $I'_2 = [0,864; 0,996]$ . Il n'est pas disjoint de  $I_2$ . Au niveau de confiance 99 %, on ne peut pas dire qu'il y a une différence significative entre  $p$  et  $p'$ .

**35 1. a)** A partir de l'échantillon  $E_1$ , au niveau de confiance 95 % :  $I_1 = [0,847; 0,987]$ .

**b)** La valeur 0,85 appartient à l'intervalle  $I_1$  donc, au niveau de confiance 95 %, cette proportion est compatible avec la fréquence obtenue à l'aide de l'échantillon  $E_1$ .

**c)** A partir de l'échantillon  $E_2$ , au niveau de confiance 95 % :  $I_2 = [0,66; 0,874]$ .

Les intervalles  $I_1$  et  $I_2$  ne sont pas disjoints, donc il n'y a pas de différence significative, au niveau de confiance 95 %, entre les fréquences de pièces conformes sur les deux échantillons.

**2. a)**  $[L_{S_1}; L_{S_2}] = [0,76; 0,94]$ .

**b)**  $[L_{C_1}; L_{C_2}] = [0,731; 0,969]$ .

**c)** Pour ce nouvel échantillon, la fréquence de pièces conformes est 0,75.

Au niveau de confiance de 95 %, on doit rejeter l'hypothèse  $p = 0,85$ .

Au niveau de confiance de 99 %, la fréquence de l'échantillon est compatible avec l'hypothèse  $p = 0,85$ .

**3.** Prélèvement n° 1 :  $f = 0,83$ . On poursuit la production.

Prélèvement n° 2 :  $f = 0,767$ . On poursuit la production.

Prélèvement n° 3 :  $f = 0,733$ ;  $f \in [L_{C_1}; L_{S_1}]$  : procédure d'alerte. On prélève immédiatement un autre échantillon.

Prélèvement n° 4 :  $f = 0,717$ ;  $f < L_{C_1}$ . On arrête la production et on procède aux réglages nécessaires.

Prélèvement n° 5 :  $f = 0,8$ . On poursuit la production.

**36 A 1. a)**  $I = [0,0073; 0,0927]$ .

**b)** Sur des lots de 100 pièces, 95 % de lots comportent au minimum 0,73 % de pièces défectueuses, et au maximum 9,27 %.

**2. a)**

$$I_n = \left[ 0,05 - 1,96\sqrt{\frac{0,0475}{n}}; 0,05 + 1,96\sqrt{\frac{0,0475}{n}} \right],$$

donc  $L_n = 2 \cdot 1,96\sqrt{\frac{0,0475}{n}} = 3,92\sqrt{\frac{0,0475}{n}}.$

**b)** L'inéquation est équivalente à

$$n \geq 0,0475 \times \left( \frac{196}{3} \right)^2.$$

Le plus petit entier solution est 203.

On en conclut que 95 % des lots de 203 pièces contiennent entre 2 % et 8 % de pièces défectueuses.

**c)**  $\frac{L_n}{2} = \frac{3,92}{2}\sqrt{\frac{0,0475}{n}} = 3,92\sqrt{\frac{0,0475}{4n}}.$

Si on veut diviser la longueur de l'intervalle par 2, on doit multiplier la taille des lots par 4.

**B** On cherche  $n$  pour que l'intervalle de fluctuation ait une longueur inférieure ou égale à 0,06. On a pour intervalle de fluctuation :

$$I_n = \left[ 0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5^2}{n}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5^2}{n}} \right].$$

$$= \left[ 0,5 - \frac{0,98}{\sqrt{n}}; 0,5 + \frac{0,98}{\sqrt{n}} \right]$$

La longueur de l'intervalle de fluctuation est

$$L_n = \frac{1,96}{\sqrt{n}}.$$

L'inéquation  $L_n \leq 0,06$  est équivalente à  $n \geq \left( \frac{98}{3} \right)^2.$  Le plus petit entier solution est

1 068. Il faut donc des lots d'au minimum 1 068 pièces pour avoir dans au moins 95 % entre 47 % et 53 % de pièces de première qualité.

**37 1. a)** L'algorithme détermine le plus petit entier  $n$  qui vérifie  $\frac{1,176}{\sqrt{n}} \leq 0,08.$

**b)** ch10\_ex37a.alg  
On obtient  $n = 217.$

**2. a)** L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est

$$I_n = \left[ 0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{n}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{n}} \right]$$

$$= \left[ 0,9 - \frac{0,588}{\sqrt{n}}; 0,9 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right].$$

La longueur de  $I_n$  est  $L_n = \frac{1,176}{\sqrt{n}}.$

**b)** On souhaite que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % ait une longueur de 0,08, donc on cherche  $n$  tel que  $L_n \leq 0,08.$  D'après la question précédente, le plus petit entier  $n$  qui vérifie cette inéquation est 217. Il faut donc distribuer des lots d'au moins 217 assiettes pour avoir un taux d'assiettes conformes compris entre 0,86 et 0,94.

**c)** ch10\_ex37b.alg

On obtient  $n = 865.$

**3. a)** ch10\_ex37c.alg

**b)** On obtient  $n_{0,93} = 157.$  Si le taux de pièces conformes est 0,93, il faut des lots d'au moins 157 pièces pour que 95 % des lots contiennent entre 89 % et 97 % d'assiettes conformes.

## Vers le Bac

**38 1. c) 2. a) 3. c)**

**39 1. a)** Intervalle de confiance au niveau 95 % de  $p$  :  $I = [0,024; 0,06].$

**b)** On ne peut pas affirmer que  $p$  appartient à l'intervalle  $I.$

**2. a)** Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de  $f$  :  $J = [0,036; 0,064].$

**b)** Pour 1 000 journées de travail prises au hasard (tirage avec remise), le nombre maximum de jours perdus pour arrêt de travail est 64.

**40 1.a)**  $I = [0,022; 0,074].$

**b)** La valeur 0,06 appartient à  $I.$  On peut donc dire qu'au niveau de confiance de 95 %, le taux de 6 % est compatible avec la fréquence obtenue par sondage.

**2.** Par « tâtonnement », on constate que la borne supérieure de l'intervalle de confiance est inférieure à 0,06 pour une fréquence  $f = \frac{9}{250}$  et

supérieure à 0,06 pour une fréquence  $f' = \frac{10}{250}.$

On doit donc avoir au plus 9 pièces non conformes sur un échantillon de 250 pièces.

**41** L'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion  $p$  de traitements Mégavax efficaces est  $[0,7857; 0,8343].$

L'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion  $p'$  de traitements Antimal efficaces est  $[0,8079; 0,8721].$

Au seuil de confiance de 95 %, on ne peut donc pas affirmer que l'un des traitements est plus efficace que l'autre.



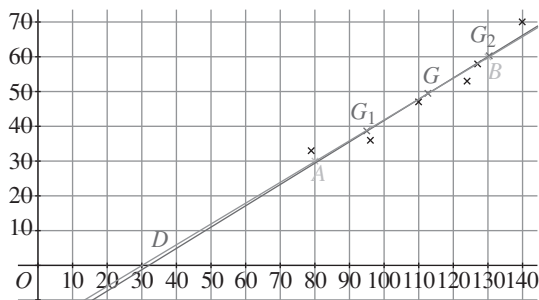
# Statistiques à deux variables

## Activités

### Activité 1 E-commerce

Dans cette activité, on introduit, à travers un exemple concret, les notions de nuage de points, de point moyen et d'ajustement affine. On se contente ici d'un ajustement graphique dans la question 1, ajustement qu'on utilise pour une interpolation : les choix des élèves ne devraient pas être très différents les uns des autres et donc l'interpolation pour la valeur  $x = 100$  devrait donner des résultats proches. On peut sensibiliser les élèves au fait que si on fait une extrapolation (en prenant  $x$  supérieur à 140, comme la valeur 200 de la question 3), on risque d'avoir des réponses qui varient beaucoup plus. Dans la question 3, on propose un ajustement par les points moyens de deux demi-nuages et on l'utilise pour une extrapolation. On conclut en annonçant une méthode plus souvent utilisée : l'ajustement par la méthode des moindres carrés.

0 a)



b) Sur le graphique ci-dessus, la droite  $D$  choisie passe par les points  $A(80 ; 30)$  et  $B(130 ; 60)$ .

Elle a pour équation  $y = \frac{60 - 30}{130 - 80}x + b \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + b$  ; or  $A$  étant sur  $D$  :  $30 = \frac{3}{5} \times 80 + b \Leftrightarrow b = -18$

donc  $D$  :  $y = \frac{3}{5}x - 18$ .

c) Pour évaluer le nombre de commandes que peut espérer l'entreprise s'il y a 100 connexions dans une journée, on remplace  $x$  par 100 dans l'équation de  $D$  :  $y = 42$ , donc l'entreprise peut espérer avoir 42 commandes.

2 a)  $G(112,7 ; 49,5)$ .

b) Le point  $G$  appartient à la droite  $D$  choisie.

Remarque : Ce n'est pas nécessairement le cas pour les différentes droites choisies par les élèves.

3 a)  $G_1(95 ; 38,7)$ .

b)  $G_2(130,3 ; 60,3)$ .

c)  $(G_1G_2) : y = 0,61x - 19,25$ .

d)  $0,61 \times x_G - 19,25 \approx y_G$  aux erreurs d'arrondis près. Donc le point  $G$  est sur la droite  $(G_1G_2)$ .

e) On remplace  $x$  par 200 dans l'équation de  $(G_1G_2) : y = 103$  à l'unité près donc l'entreprise peut espérer avoir 103 commandes.

## Activité 2 Réduire les distances

Dans cette activité, on observe, à l'aide d'un logiciel le caractère minimal de la somme des carrés des écarts (cf. les commentaires du programme). Pour cela, on fait construire aux élèves sous GeoGebra une droite  $\Delta$  dont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine se commandent par deux curseurs. On construit un nuage de points puis les segments formés par chacun des points du nuage et son projeté sur  $\Delta$  parallèlement à  $(Oy)$ . On cherche alors la droite  $\Delta$  qui minimise la somme des carrés des longueurs de ces segments. On peut ainsi faire visualiser aux élèves la démarche qui conduit à la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Il n'est évidemment pas question de faire le moindre calcul mais il s'agit ici de donner un « sens » à cette méthode, dont les résultats seront toujours obtenus grâce à la calculatrice ou aux fonctions disponibles sur les logiciels.

0 a) b)  ch11\_act2.ggb

c) On choisit par exemple :  $m = -0,94$  et  $p = 10,9$ .

2 a) b)  ch11\_act2.ggb


c)  $t = 4,91$

d) Pour  $m = -0,96$  et  $p = 11$  on a  $t = 4,87$ .

3 a)  ch11\_act2.ggb

b) La droite  $\Delta$  obtenue à la question 2. c) passe par  $G$ .

4 On a alors  $t = 4,84$ .

5  ch11\_act2.ggb. Les points peuvent être déplacés directement à la souris. Il semble que le point  $G$  soit toujours sur la droite  $\Delta'$ .

## Travaux Pratiques

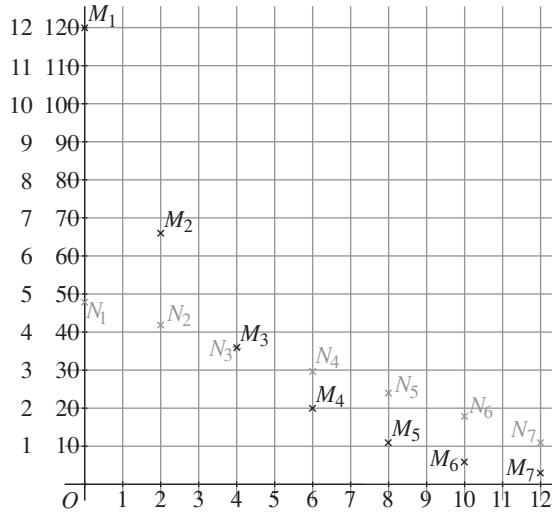
Dans ce TP on met en œuvre dans un contexte concret les différentes capacités attendues du programme ainsi que l'utilisation d'un changement de variable pour se ramener à un ajustement affine (cf commentaire du programme).

### TP Une perfusion bien ajustée !

0 a)

$t_i$	0	2	4	6	8	10	12
$x_i = 120 - c_i$	120	66	36	20	11	6	3
$z_i = \ln(x_i)$	4,79	4,19	3,58	3,00	2,40	1,79	1,10

b)



c) Un ajustement affine de  $x_i$  en  $t_i$  ne semble pas opportun.

2 a) Voir le tableau de la question 1. a).

b) Voir le graphique.

c) Un ajustement affine entre les séries  $t_i$  et  $z_i$  semble pertinent.

3 a)  $z = -0,3t + 4,8$ .

b)  $\ln(120 - c) = -0,3t + 4,8 \Leftrightarrow c = 120 - e^{4,8}e^{-0,3t}$  ; or  $e^{4,8} \approx 121,5$  donc  $c = 120 - 121,5e^{-0,3t}$ .

4 a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 120$ . La courbe représentative de  $f$  admet la droite d'équation  $y = 120$  pour asymptote en  $+\infty$ .

b)  $f'(t) = 36,45 e^{-0,3t}$  ; pour tout  $t$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(t) > 0$  d'où le tableau de variation suivant :

$t$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f$	-1,5	120

c)  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 120$  donc la concentration en produit au niveau du ventricule droit ne dépasse pas  $120 \mu\text{g}/\text{cm}^3$ .

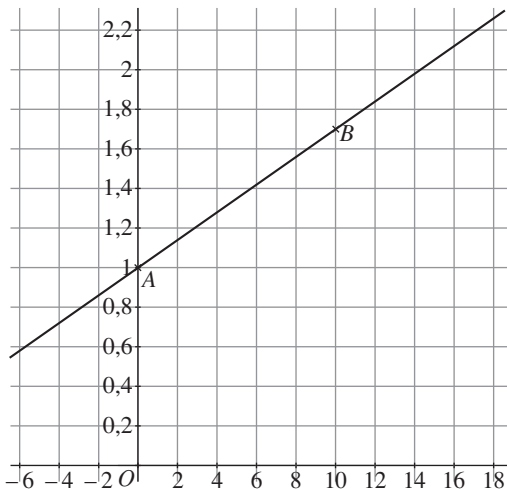
d)  $f(t) > 119 \Leftrightarrow 120 - 121,5e^{-0,3t} > 119 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 121,5}{0,3}$ . La concentration en produit dépasse  $119 \mu\text{g}/\text{cm}^3$  au bout de  $\frac{\ln 121,5}{0,3}$  minutes, soit environ 16 minutes à la minute près.



# Exercices

**2**  $\bar{x} \approx 1,53$ .

**4** On peut placer les points de coordonnées (0; 1) et (10; 1,7) ou utiliser l'ordonnée à l'origine (1) et le coefficient directeur (0,07).



**6** Son coefficient directeur est :

$$\frac{102,5 - 184,3}{13 - 5} = -10,225$$

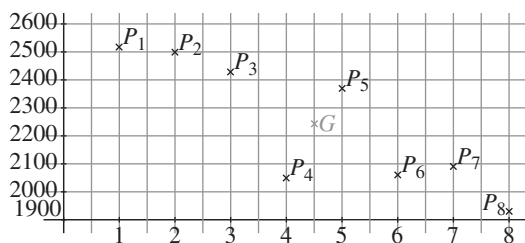
donc (AB) :  $y = -10,225x + b$ .

De plus, A est sur (AB) donc

$$184,3 = -10,225 \times 5 + b \text{ d'où } b = 235,425.$$

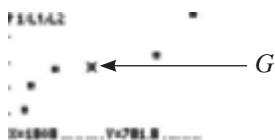
Finalement, (AB) :  $y = -10,225x + 235,425$ .

**8 a)** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**b)**  $G(4,5 ; 2243,75)$ .

**10 a)** Par exemple, avec X entre 100 et 4000; Y entre 600 et 1000, on a :



**b)**  $G(1808 ; 781,8)$ .

**c)** Voir question a).

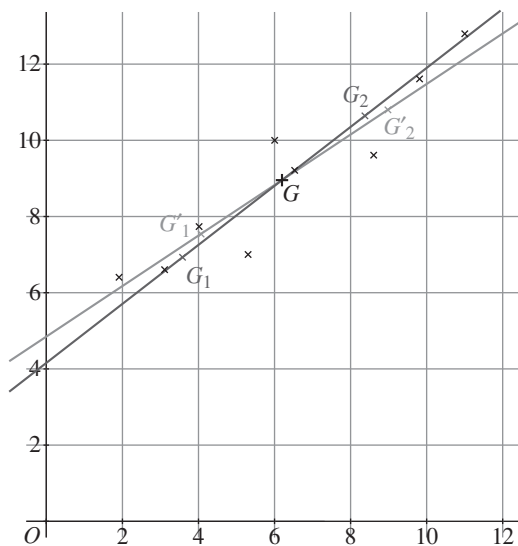
**11 a)** Par exemple, avec X entre 0 et 10; Y entre 80 et 250, on a :



**b)**  $G(5,85 ; 158,76)$ .

**c)** Voir question a).

**12 1.** On peut prendre 0,5 cm pour unité graphique.



**2. a)**  $G_1(4,06 ; 7,54)$ .

**b)**  $G_2(8,98 ; 10,8)$ .

**c)**  $(G_1, G_2)$  :  $y = 0,66x + 4,87$ .

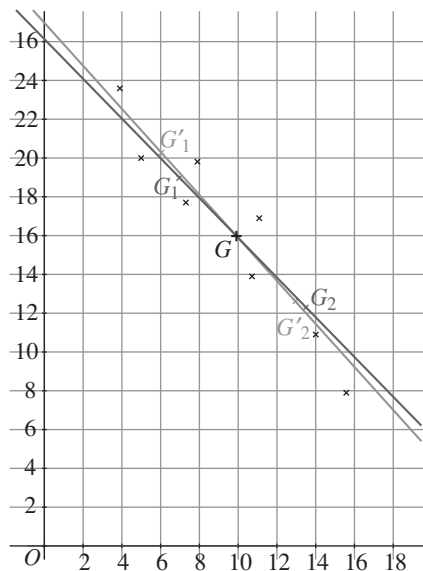
**3.**  $G'_1(3,58 ; 6,93)$  ;  $G'_2(8,38 ; 10,64)$  ;

$(G'_1, G'_2)$  :  $y = 0,77x + 4,19$ .

**4. a)**  $G(6,24 ; 8,99)$ .

**b)** En remplaçant  $x$  par 6,24 dans chacune des deux équations, on obtient, aux erreurs d'arrondis près, 8,99.

**13** 1. On peut prendre 0,25 cm pour unité graphique.



2. a)  $G_1(6,96 ; 19)$ .

b)  $G_2(13,5 ; 12,3)$ .

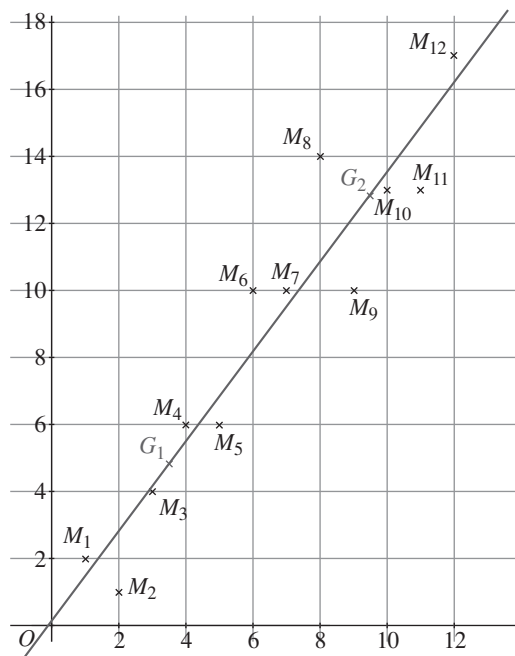
c)  $(G_1G_2) : y = -1,02x + 26,09$ .

3.  $G'_1(6,03 ; 20,28) ; G'_2(12,94 ; 12,62) ;$   
 $(G'_1G'_2) : y = -1,11x + 26,97$ .

4. a)  $G(9,87 ; 16,02)$ .

b) En remplaçant  $x$  par 9,87 dans chacune des deux équations, on obtient, aux erreurs d'arrondis près, 16,02.

**14** 1. Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



2.  $G_1\left(\frac{7}{2}; \frac{29}{6}\right)$  et  $G_2\left(\frac{19}{2}; \frac{77}{6}\right)$ .

3. Voir figure.

4. a) L'équation réduite de  $(G_1G_2)$  est de la forme

$$y = \frac{\frac{77}{6} - \frac{29}{6}}{\frac{19}{2} - \frac{7}{2}}x + p \text{ soit } y = \frac{4}{3}x + p;$$

de plus,  $G_1$  appartenant à  $(G_1G_2)$ , on a :

$$\frac{29}{6} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{2} + p \text{ soit } p = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Finalement, } (G_1G_2) : y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}.$$

b) On a :  $\frac{4}{3} \times 15 + \frac{1}{6} = \frac{121}{6} \approx 20,2$ . Il y aurait environ 20 animaux atteints du virus V au cours de la 15<sup>e</sup> semaine.

**15**  $y = 4,26x - 3,07$ .

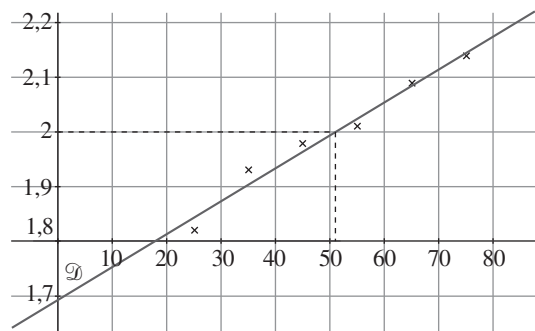
**16**  $y = 1,94x + 45,53$ .

**18** En 2014,  $x_i = 12$ ; on a alors :

$$1,94 \times 12 + 45,53 = 68,81.$$

Il y aurait environ 68,8 millions de cartes bancaires en France en 2014.

**19 1.** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.

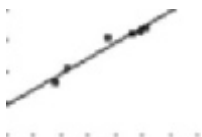


**2. a)**  $\mathcal{D}: y = 0,006x + 1,694$ .

**b)** Le taux moyen de cholestérol d'un individu de 51 ans vaut environ 2 g par litre de sang.

**20 a)**  $\mathcal{D}: y = 0,496x + 4,629$ .

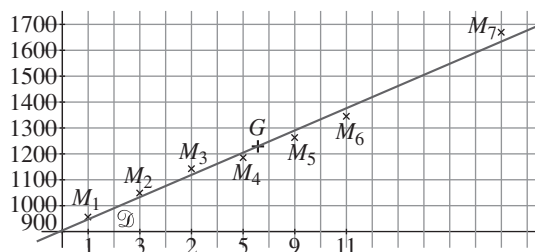
**b)** En prenant X entre 30 et 100 et Y entre 10 et 50, on obtient :



L'ajustement affine obtenu par la méthode des moindres carrés semble pertinent.

**c)** On résout l'équation  $0,496x + 4,629 = 50$ , on trouve  $x = 91,474$  à  $10^{-3}$  près. Le coût des soins hospitaliers lorsque le coût des soins prodigués en ville atteindra 50 milliards d'euros sera d'environ 91,474 milliards d'euros.

**21 a)** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**b)**  $G(7,57 ; 1228,57)$ , coordonnées arrondies à  $10^{-2}$  près.

**c)**  $\mathcal{D}: y = 42,85x + 904,13$  (coefficients arrondis à  $10^{-2}$  près).

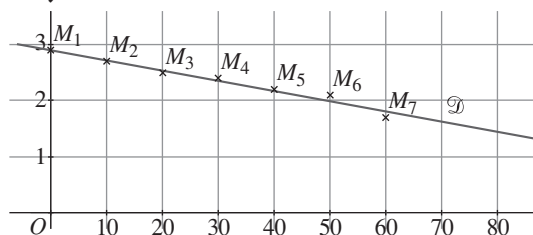
**d)** En 2015,  $x = 23$ ; on a alors :  $42,85 \times 23 + 904,13 = 1889,68$ .

En France pour l'année 2015, il y aurait environ 1 890 hypermarchés.

**23 1.**

$t_i$	0	10	20	30	40	50	60
$y_i = \ln c_i$	2,90	2,70	2,50	2,40	2,20	2,10	1,70

**2. a)**



**b)** Un ajustement affine paraît justifié car les points présentent un certain alignement.

**3.**  $\mathcal{D}: y = -0,02t + 2,90$ .

**4. a)** On a :  $\ln c = -0,02t + 2,90$   
soit  $c = e^{-0,02t + 2,9} = e^{2,9} e^{-0,02t}$  ou encore  
 $c = Ae^{Bt}$  avec  $A = e^{2,9}$  et  $B = -0,02$ .

**b)** On résout l'inéquation

$$c < 4 \Leftrightarrow e^{-0,02t + 2,9} < 4 \Leftrightarrow t > \frac{2,9 - \ln 4}{0,02}.$$

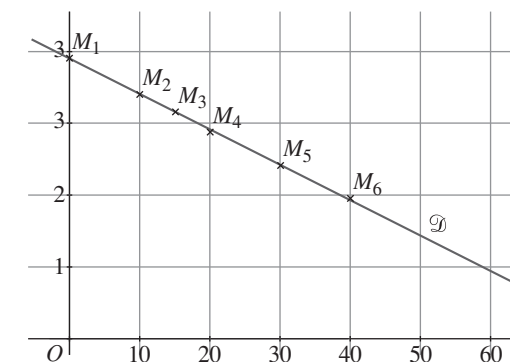
Or  $\frac{2,9 - \ln 4}{0,02} \approx 76$  donc il faut environ 76 minutes pour atteindre une concentration plasmatique inférieure à 4  $\mu\text{g/mL}$ .

**c)** On a :  $e^{-0,02 \times 70 + 2,9} = e^{1,5} \approx 4,5$ . La concentration plasmatique au bout de 1 h 10 min est 4,5  $\mu\text{g/mL}$ .

**24 1.**

$t_i$	0	10	15	20	30	40
$z_i = \ln(y_i - 20)$	3,91	3,40	3,16	2,89	2,41	1,95

**2.**



**3.**  $\mathcal{D}: z = -0,05t + 3,90$ .

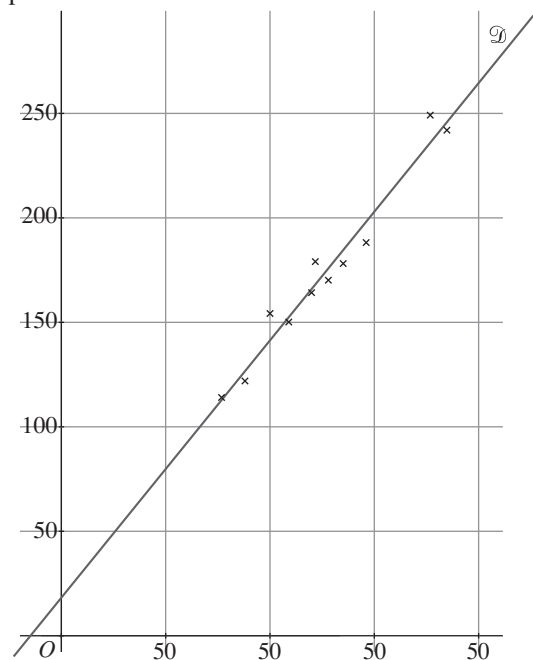
**4. a)** On a :  $z = -0,05t + 3,90$  c'est-à-dire :  
 $\ln(y - 20) = -0,05t + 3,90$  soit  $y - 20 = e^{-0,05t + 3,9}$   
ou encore  $y = e^{-0,05t} e^{3,9} + 20 = A + Be^{Ct}$   
avec  $A = 20$ ,  $B = e^{3,9} \approx 49,4$  et  $C = -0,05$ .

**b)** On résout  $y \leq 21 \Leftrightarrow t \geq \frac{3,9}{0,05}$ , or  $\frac{3,9}{0,05} = 78$

donc le corps C a une température inférieure ou égale à 21 °C au bout de 78 minutes.

**c)**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ . La température du corps C tend vers la température de l'enceinte, soit 20 °C.

**25** On peut commencer par représenter le nuage de points pour savoir si un ajustement affine est pertinent.



Un ajustement affine semble pertinent. La droite  $\mathcal{D}$  d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés a pour équation  $y = 1,23x + 18,86$  (coefficients arrondis à  $10^{-2}$  près).

La nouvelle clinique doit compter 220 lits :  
 $1,23 \times 220 + 18,86 = 289,46$ .

Le groupe d'hospitalisation doit prévoir 289 postes de personnel médical pour cette clinique.

*Remarque : Un ajustement « graphique » ou par la méthode de Mayer (points moyens de deux demi-nuages) peut aussi être considéré comme une démarche pertinente, même si on peut attendre des élèves qu'ils utilisent la méthode des moindres carrés.*

## Problèmes

**26 1.** ch11\_pb26.ods, feuille « professeur »

**2. a) b)** ch11\_pb26.ods, feuille « professeur »

**c)** La forme de ce nuage laisse supposer qu'un ajustement affine entre  $y$  et  $z$  semble pertinent.

**d)** ch11\_pb26.ods, feuille « professeur »

**e)**  $y = 6,67z + 1,28$ . On a donc  $y = 6,67 \ln x + 1,28$ .

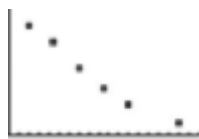
**f)** On résout  $6,67 \ln x + 1,28 = 20,328052$ , on

$$\frac{20,328052 - 1,28}{6,67}$$

obtient  $x = e^{\frac{20,328052 - 1,28}{6,67}} \approx 17,4$  à  $10^{-1}$  près.

Au cours de la 17<sup>e</sup> semaine, le film *Intouchables* atteindra les 20,328 052 millions d'entrées.

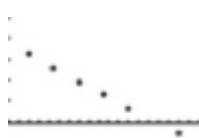
**27 1.** Avec  $X$  compris entre 8 et 27 et  $Y$  entre 0 et 115, on obtient :



**2. a)**

$x_i$	10	12,5	15	17,5	20	25
$y_i$	100	85	62	42	28	11
$z_i$	3,219	2,571	1,930	1,295	0,693	-0,547

**b)** Avec  $X$  compris entre 8 et 27 et  $Y$  entre -1 et 5, on obtient :



Un ajustement affine semble cette fois pertinent.

**c)**  $z = -0,251x + 5,704$ .

**d)** On a alors :

$$\ln\left(\frac{y}{x-6}\right) = -0,251x + 5,704$$

$$\Leftrightarrow y = (x-6)e^{-0,251x+5,704}.$$

**3. a)** Le chiffre d'affaire est égal au produit du nombre de machines vendues par le prix d'une machine soit :

$$y \times x = 300(x-6)e^{-\frac{1}{4}x} \times x = f(x).$$

**b)** Pour tout réel  $x$  de  $[10; +\infty[$ ,

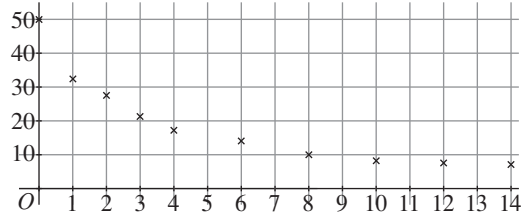
$$f'(x) = -75(x^2 - 14x + 24)e^{-\frac{1}{4}x}. \text{ Or, pour tout } x \text{ de } [10; +\infty[, e^{-\frac{1}{4}x} > 0, \text{ donc } f'(x) \text{ est du signe contraire de } x^2 - 14x + 24, \text{ polynôme de degré 2 qui s'annule en 2 et en 12.}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

$x$	10	12	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$12\,000e^{-2,5}$	$21\,600e^{-3}$	0

c) Le chiffre d'affaires est maximal pour  $x = 12$ , soit un prix de vente de 12 000 €. Le chiffre d'affaires maximal est alors de  $21600e^{-3} \approx 1\,075,4$  milliers d'euros, soit 1 075 400 €, à la centaine d'euros près.

**28 1.**

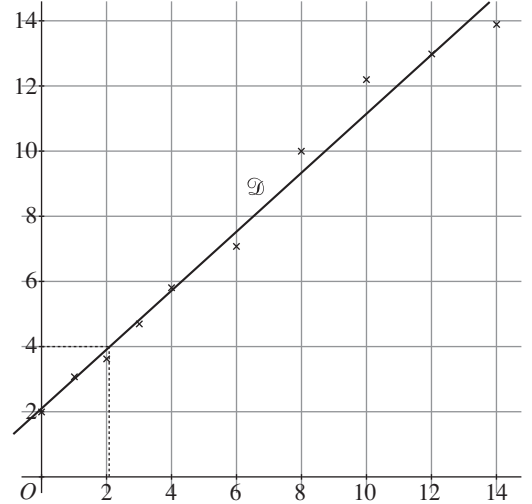


Un ajustement affine ne semble pas pertinent car les points ne présentent pas d'alignement particulier.

**2. a)**

$t$	0	1	2	3	4	6	8	10	12	14
$y(t)$	2	3,08	3,62	4,69	5,81	7,09	10	12,2	12,99	13,89

b) Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



Un ajustement affine semble pertinent car les points présentent un certain alignement.

c)  $\mathcal{D} : y = 0,9t + 2,1$ .

d)  $C(t) = \frac{100}{y(t)} = \frac{100}{0,9t + 2,1}$ .

3. a)  $C(7,5) = 11,3$  millimoles par litre.

b) Graphiquement, on cherche la valeur de  $t$  telle que  $C(t) = 25$  soit  $y(t) = 4$ , on a  $t \approx 2$  min.

Algébriquement, on résout

$$C(t) = 25 \Leftrightarrow \frac{100}{0,9t + 2,1} = 25$$

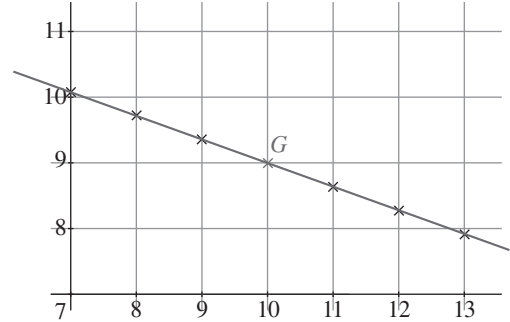
$$\Leftrightarrow t = \frac{4 - 2,1}{0,9} \approx 2,11$$

soit 2 minutes et 7 secondes à la seconde près.

**29 1. a)**

Numéro $x_i$ de la semaine	7	8	9	10	11	12	13
$y_i = \ln(n_i)$	10,08	9,72	9,36	9	8,64	8,28	7,92

**b)**



c)  $G(10 ; 9)$ .

2. a) Voir graphique.

b)  $(AG) : y = -0,36x + 12,6$ .

c)  $\ln n = -0,36x + 12,6$  soit  $n = e^{-0,36x + 12,6}$ .

d) On a :  $e^{-0,36 \times 15 + 12,6} \approx 1\,339$  à l'unité près.

e) ch11\_pb29.alg

On trouve  $N = 16$ .

30 1. a) Avec  $X$  compris entre 13 et 45 et  $Y$  entre 2 et 12, on obtient :



b)  $\mathcal{D} : y = -0,25x + 12,90$ .

c) On a :  $-0,25 \times 26 + 12,90 = 6,4$  ce qui ne correspond pas à ce qu'indique le tableau.

## 2. a)

$x_i$	16,5	18	19,8	22	25
$z_i$	0,100	0,111	0,125	0,143	0,182

$x_i$	27	29	35	39	41,7
$z_i$	0,200	0,222	0,250	0,286	0,313

b)  $\mathcal{D}' : z = 0,0084x - 0,0356$ .

c) De la question b), on déduit :

$$y = \frac{1}{0,0084x - 0,0356}.$$

On a alors  $\frac{1}{0,0084 \times 26 - 0,0356} \approx 5,47$  à  $10^{-2}$  près ce qui est plus conforme au premier tableau.

## 31 A 1. a)

$x_i$	0,5	1	1,9	2,1
$y_i$	10,5	9	6,9	6,5
$Y_i = \ln y_i$	2,35	2,2	1,93	1,87

$x_i$	2,4	2,8	3,2	3,5
$y_i$	5,9	5,3	4,7	4,3
$Y_i = \ln y_i$	1,77	1,67	1,55	1,46

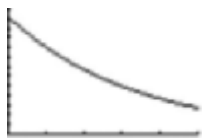
b)  $Y = -0,3x + 2,5$ .

c) Alors,  $\ln y = -0,3x + 2,5$  soit  $y = e^{-0,3x + 2,5}$ .

2.  $f(x) = e^{-0,3x + 2,5}$ .

a) Pour tout  $x$  de  $[0; 5]$ ,  $f'(x) = -0,3e^{-0,3x + 2,5}$ , d'où  $f'(x) < 0$  sur  $[0; 5]$ , donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; 5]$ .

b) Avec  $X$  compris entre 0 et 5 et  $Y$  compris entre 0 et 12



## B 1. a)

$x$	0,5	1	1,9	2,1
$z$	2	2,4	2,8	2,9
$Z = e^z$	7,39	11,02	16,44	18,17

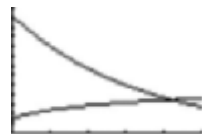
$x$	2,4	2,8	3,2	3,5
$z$	3	3,1	3,2	3,3
$Z = e^z$	20,09	22,2	24,53	27,11

b)  $Z = 6,4x + 4,4$ .

c) Alors,  $e^z = 6,4x + 4,4$  soit  $z = \ln(6,4x + 4,4)$ .

2. a) Pour tout  $x$  de  $[0; 5]$ ,  $g'(x) = \frac{6,4}{6,4x + 4,4}$ , d'où  $g'(x) > 0$  sur  $[0; 5]$ , donc  $g$  est strictement croissante sur  $[0; 5]$ .

b)



c) On trouve  $x_0 \approx 4,2$  à  $0,1$  près.

32 1. a) Un ajustement affine ne semble pas pertinent.

b)

$t_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	1,03	1,39	1,74	2,11	2,46

$t_i$	6	7	8	9	10
$y_i$	2,83	3,19	3,57	3,95	4,29

2. a)  $y = 0,36t + 0,66$ .

b) On a :

$$\frac{1500}{1500 - N} = 0,36t + 0,66$$

$$\Leftrightarrow \frac{1500}{0,36t + 0,66} = 1500 - N$$

$$\Leftrightarrow N = 1500 - \frac{1500}{0,36t + 0,66}$$

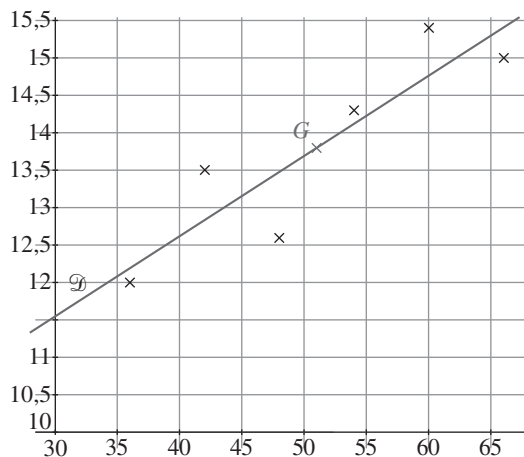
$$\Leftrightarrow N = 1500 \left( 1 - \frac{1}{0,36t + 0,66} \right).$$

c) On résout

$$1 - \frac{1}{0,36t + 0,66} \geq 0,9 \Leftrightarrow t \geq 25,9.$$

Il faudrait 26 jours au fabricant pour espérer convaincre au moins 90 % des salariés de l'entreprise.

**33 1. a)** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**b)** Si des élèves répondent que cela ne leur semble pas très pertinent, on peut laisser cette question en suspend jusqu'à la fin du problème. On pourra discuter de cette réponse après avoir traité la question **3. b**. L'impression que l'ajustement affine n'est pas très pertinent est accentuée par l'échelle choisie : les écarts en ordonnée sont très accentués.

**c)**  $G(51 ; 13,8)$ .

**2. a)**  $y = 0,107x + 8,360$ .

**b)** Voir graphique.

**3. a)** On a :  $0,107 \times 70 + 8,360 = 15,9$ .

La tension artérielle d'une personne de 70 ans obtenue à partir de cette équation est de 15,9.

**b)**  $\frac{0,2}{16,1} \approx 0,0124$ . Le pourcentage d'erreur est 1,24, à 0,1 % près.

**34 a)** Vrai.

**b)** Faux, elle a pour équation  $y = -0,78x + 4,82$ .

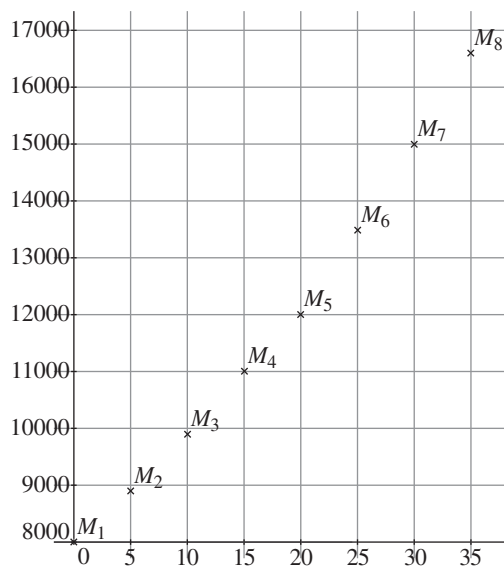
**c)** Faux car elle passe par le point moyen du nuage de coordonnées  $(3 ; 2,48)$ .

**35 a)** Vrai.

**b)** Faux : on a  $\ln x = 0,47t - 1$  soit  $x = e^{0,47t-1}$ .

**c)** Vrai :  $e^{0,47 \times 10 - 1} = 40,447$ .

**36 1.** Le graphique ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.



**2. a)**

Rang de l'année $t_i$	0	5	10	15
$y_i$	2,079	2,186	2,293	2,398

Rang de l'année $t_i$	20	25	30	35
$y_i$	2,485	2,603	2,708	2,809

**b)**  $y = 0,02t + 2,08$ .

**c)** Alors,  $\ln p = 0,02t + 2,08$

soit  $p = e^{0,02t + 2,08} = e^{2,08} e^{0,02t}$ . Or  $e^{2,08} \approx 8$  à  $10^{-2}$  près, donc on peut prendre pour modèle d'évolution de la population :  $p = 8e^{0,02t}$ .

**3. \*** En 2020,  $t = 45$  ; on a :  $8e^{0,02 \times 45} \approx 19,677$ . Il y aurait 19 700 habitants à la centaine près.

\* On résout  $8e^{0,02t} > 25$  soit  $t > \frac{\ln 3,125}{0,02}$ ,

or  $\frac{\ln 3,125}{0,02} \approx 56,97$  donc la population d'Acme

dépassera pour la première fois les 25 000 d'habitants à la fin de l'année 2031 (1975 + 56).

# Mémento

1. c)

$x$	$-\infty$	$4/5$	$+\infty$
$4 - 5x$	+	0	-

d)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-3x$	+	0	-

2. c) En factorisant par  $x$ , on a  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 5/2$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$5/2$	$+\infty$
$-2x^2 + 5x$	-	0	+	-

b) On a :  $\Delta = 0$  et  $x_0 = 7$  :

$x$	$-\infty$	$7$	$+\infty$
$-3x^2 + 42x - 147$	-	0	-

3. b) Pour  $-3t^2 + t - 2$ , on a :  $\Delta = -23 < 0$  donc, pour tout réel  $t$ ,  $-3t^2 + t - 2 < 0$ .  
Pour  $8t^2 - 6t + 1$ , on a :  $\Delta = 4$ ,  $t_1 = 1/2$  et  $t_2 = 1/4$  d'où :

$t$	$-\infty$	$1/4$	$1/2$	$+\infty$
$-3t^2 + t - 2$	-	-	-	-
$8t^2 - 6t + 1$	+	0	-	+
$(8t^2 - 6t + 1)(-3t^2 + t - 2)$	-	0	+	-

c) Pour tout réel  $x$ ,  $(x^2 + 1) > 0$  donc  $(4x - 9)(x^2 + 1)$  est du signe de  $(4x - 9)$  d'où :

$x$	$-\infty$	$9/4$	$+\infty$
$4x - 9$	-	0	+
$(4x - 9)(x^2 + 1)$	-	0	+

d) Pour  $-2x^2 - 3x + 5$ , on a :  $\Delta = 49$ ,  $x_1 = -5/2$  et  $x_2 = 1$  d'où :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-5/2$	$1$	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+	+	+
$-2x^2 - 3x + 5$	-	-	0	+	-
$(-2x^2 - 3x + 5)(x + 3)$	+	0	-	0	-

4. b) Pour  $x^2 + x + 4$ , on a :  $\Delta = -15 < 0$  d'où :

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$3 - x$	+	0	-
$x^2 + x + 4$	+	+	+
$\frac{3 - x}{x^2 + x + 4}$	+	0	-

c) Pour  $-x^2 + 9x + 10$ , on a :  $\Delta = 121$ ,  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 10$  d'où :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3/2$	$10$	$+\infty$
$-x^2 + 9x + 10$	-	0	+	+	-
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$\frac{2x - 3}{-x^2 + 9x + 10}$	+	-	0	+	-

d) Pour tout réel  $x$ ,  $(x + 3)^2 \geq 0$  d'où :

$x$	$-\infty$	$-3$	$5$	$+\infty$
$(x + 3)^2$	+	0	+	+
$x - 5$	-	-	0	+
$\frac{x - 5}{(x + 3)^2}$	-	-	0	+



**5. b)**  $g'(x) = 7x^6$ . **c)**  $f'(x) = 0$ .  
**d)**  $f'(x) = 1$ . **f)**  $f'(x) = -7$ .  
**g)**  $f'(x) = -2$ . **h)**  $f'(t) = 12t^2$ .  
**i)**  $f'(x) = -5$ . **j)**  $h'(t) = -14t^6$ .

**6. b)**  $g'(t) = 3t^2 + 2t - 1$ .  
**c)**  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2$ .

**7. b)**  $f'(x) = \frac{2}{3}x$ .

**d)**  $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + 2$ .

**8. b)**  $f'(x) = 2(3x^2 - 2x + 5) + (2x + 3)(6x - 2)$   
 $= 18x^2 + 10x + 4$ .

**c)**  $u'(t) = \cos t - t \sin t$ .

**9. c)**  $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 4)^2}$ .

**10. b)**  $f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2 - 2)}{(x-1)^2}$ .  
 $= \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$

**c)**  $f'(x) = \frac{5(x^2 + 1) - 2x(5x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$   
 $= \frac{-5x^2 - 2x + 5}{(x^2 + 1)^2}$ .

**11. b)**  $f'(t) = -3\sin(3t)$ .

**c)**  $f'(t) = \sin(t + \pi) + t \cos(t + \pi)$ .


**12. b)** On a :  $f'(x) = -2x + 4$  d'où :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$			

**c)** On a :  $f'(x) = 6x - 2$  d'où :

$x$	$-\infty$	1/3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$			

**13. b)** On a :  $f'(x) = 5x^2 + 19x - 4$ .  
 On a :  $\Delta = 441$ ,  $x_1 = -4$  et  $x_2 = 1/5$ , d'où :

$x$	$-\infty$	$-4$	$1/5$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$					

**c)** On a :  $f'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ , donc, un carré étant toujours positif,  $f'$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et nulle en 2 d'où :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f$			

**14. b)** On a :

$f'(x) = \frac{1(3x-1) - 3(x+5)}{(3x-1)^2} = \frac{-16}{(3x-1)^2}$  donc, un carré étant toujours positif,  $f'$  est négative sur  $I$  d'où :

$x$	-5	0
$f'(x)$	-	-
$f$		

**c)** On a :  $f'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 + 1)^2}$  donc, un carré étant toujours positif,  $f'(x)$  est du signe de  $-12x$  d'où :

$x$	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f$			

**15. b)** On a :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

donc, un carré étant toujours positif et travaillant sur  $I = ]1; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $x-3$  d'où :

$x$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f$				

↘ 5 ↗

**c)** On a :  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$  donc, un carré

étant toujours positif,  $f'(x)$  est du signe de  $x^2 + 4x - 5$  d'où, avec  $\Delta = 36$ ,  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -5$  :

$x$	$-\infty$	-5	-2	
$f'(x)$		+	0	-
$f$				

↘ -8 ↗

**17. a)**  $f'(x) = 1 + 2 \cos x$ .

**b)** L'inéquation  $1 + 2 \cos x > 0$  s'écrit encore

$$\cos x > -\frac{1}{2} \text{ soit } \cos x > \cos \frac{2\pi}{3} \text{ d'où l'ensemble}$$

des solutions sur  $[0; \pi]$  :  $S = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right[$ .

**c)** On en déduit le tableau de signes de

$f'(x) = 1 + 2 \cos x$  :

$x$	0	$2\pi/3$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-

**d)** On en déduit le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$2\pi/3$	$\pi$	
$f'(x)$		+	0	-
$f$				

$\nearrow \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \searrow$

0  $\pi$

**19. a)**  $f'(x) = \frac{-40x}{(4x^2 + 1)^2}$ .

**b)** Un carré étant toujours positif,  $f'(x)$  est du signe de  $-40x$  sur  $[-3; 3]$  : positif sur  $[-3; 0]$  et négatif sur  $[0; 3]$ , d'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	-3	0	3
$f$			

↗ 5 ↘

$5/37$   $5/37$

**c)** On a :  $f(-1) = 1$  et  $f'(-1) = 8/5$  donc la tangente à  $C$  en  $B$  est la droite passant par  $B$  de coordonnées  $(-1; 1)$  et de coefficient directeur  $8/5$ . D'où le tracé de cette tangente. De même, la tangente à  $C$  en  $A$  est la droite passant par  $A$  de coordonnées  $(1; 1)$  et de coefficient directeur  $-8/5$ .

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée.

