

RÉVISION Suites

Exercice 1

4 points

Pour chaque question, indiquer la seule proposition exacte.

1. La suite de terme générale $(-1)^n$:
 - a. a pour limite 0 ;
 - b. n'a pas de limite ;
 - c. a deux limites -1 et 1.
2. On admet que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{\sin^2 n}{n}$ admet 0 pour limites. Il existe alors un entier N tel que u_N soit :
 - a. inférieur à -10^{10} ;
 - b. inférieur à 10^{-10} ;
 - c. supérieur à 10^{10} .
3. Une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$:
 - a. n'a pas de limite ;
 - b. a pour limite $+\infty$;
 - c. a pour limite 0.
4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites géométrique de raisons respectives q et q' avec $0 < q < q'$ alors la suite de terme générale $\frac{u_n}{v_n}$:
 - a. peut avoir $-\infty$ pour limite ;
 - b. a pour limite $+\infty$;
 - c. a pour limite 0.

Exercice 2

3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_n = 1,01^n$.
Il existe un entier naturel N tel que $u_N \geq 10^{999}$.
2. Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5000 \times 0,78^n$.
Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10^{-50}$.
3. Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3 + 0,3^n$.
Il existe un entier naturel N tel que $|u_N - 3| \geq 10^{10}$

Exercice 3

8 points

L'accès internet chez les particuliers se fait majoritairement aujourd'hui en ADSL.

Cette liaison utilise les câbles téléphoniques pour relier le particulier au DSLAM (répartiteur du fournisseur d'accès choisi). La puissance du signal dépend de l'atténuation engendrée par les longueurs de câbles entre le particulier et le DSLAM.

En parcourant le câble téléphonique, la puissance du signal diminue de 29,2 % par tronçon de 100 m de câble.

1. On appelle P_0 la puissance disponible au répartiteur (DSLAM).
 - a. Exprimer la puissance P_1 disponible après un tronçon de 100 m de câble en fonction de P_0 .

- b. Vérifier que la proportion de puissance disponible après 2 tronçons de câble de 100 m est égale à 50,1 % (valeur arrondie à 0,1 près).
 - c. Déterminer la valeur arrondie à 0,1 près de la proportion de puissance disponible après 5 tronçons de câble de 100 m.
2. On note P_n la puissance à la sortie de n tronçons de câble de 100 m, n étant un entier naturel.
- a. Quelle est la nature de la suite (P_n) ? Justifié.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer alors P_n en fonction de n et de P_0 .
 - c. En déduire la proportion de puissance disponible après 15 tronçons de 100 m.
3. a. Quelle est la limite d'une suite géométrique de raison 0,708 ? Justifier.
- b. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur à N , on a : $0,708^n < 10^{-7}$.
À l'aide d'une table de valeur ou d'un algorithme, déterminer le plus grand entier naturel n tel que $0,708^n \geq 10^{-7}$.
- c. la limite d'éligibilité au service ADSL est telle que $\frac{P_s}{P_e} = 1 \times 10^{-7}$, où P_s désigne la puissance du signal chez le particulier et P_e la puissance fournie par le DSLAM.
Déterminer la distance théorique maximale de câblage entre le particulier et le DSLAM qui permette le fonctionnement de l'ADSL chez le particulier. (On donnera la valeur arrondie au mètre près.)

Exercice Prise de décision et estimation

Exercice 1

6 points

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant eut une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %. Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthmes et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eut des crises d'asthmes.

Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La **règle de décision** prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de jeune de 11 à 14 ans ayant eut une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?
3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y aurait plus de jeunes ayant eut une crise d'asthme que le reste du département. Combien faudrait-il prendre de sujet pour qu'une proportion observée de 19 % soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

Exercice 2**6 points**

Dans tout cette exercice, la production est supposée suffisamment importante pour que l'on assimile le choix d'un échantillon à un tirage avec remise.
Un sous-traitant est chargé de concevoir des pièces pour un constructeur automobile.

1. Un sondage est réalisé pour tester la qualité de la production du sous-traitant. On suppose que la proportion de pièces non conforme dans la production est comprise entre 0,02 et 0,98 ; sur un échantillon de 250 pièces, 12 ne répondent pas au cahier des charges.
 - a. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % obtenu à partir de cet échantillon. Donner les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-3} près.
 - b. Le client veut un taux de pièces non conformes inférieur ou égal à 6 %. Compte tenu du sondage effectué, peut-on affirmer avec un niveau de confiance de 95 % que cette condition est respectée ?
2. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Le sous-traitant procède à de nouveau réglages et fait un nouveau sondage sur 250 pièces. Déterminer à l'aide de la calculatrice, le nombre maximum de pièces non conformes dans cet échantillon pour pouvoir affirmer que, au niveau de confiance de 95 %, le taux de pièces non conformes est inférieur ou égal à 6 % dans la production. Expliquer votre démarche.

RÉVISION Probabilité

Exercice 1**5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Recopier pour chaque question le numéro de la question suivi de la proposition qui vous semble exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On souhaite simuler dans la cellule d'un tableur le choix au hasard d'un nombre réel dans l'intervalle $[5 ; 7]$. On dispose d'une fonction, Alea(), qui renvoie un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
La formule à entrer dans la cellule est :
 - a. $=\text{Alea}()+5$;
 - b. $=7*\text{Alea}()-5*\text{Alea}()$;
 - c. $=2*\text{Alea}()+5$.
2. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[5 ; 7]$. Alors :
 - a. $P(X \leq 6,5) = 1,5$;
 - b. $E(X) = 1$;
 - c. $\sigma(X) = 0,58$ à 10^{-2} près.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$. Alors :
 - a. $P(Y > 2) = e^{-0,2}$;
 - b. $P(Y = 2) = 1 - e^{-0,2}$;
 - c. $P(1 \leq Y \leq 2) = e^{-0,2} - e^{-0,2}$
4. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ . L'espérance de T est égale à :

- a. $\frac{\lambda}{2}$;
- b. $\frac{1}{\lambda}$;
- c. $\frac{1}{\lambda} \ln(2)$.

5. Une variable Z suit une loi normale d'espérance $m = 12$ et d'écart-type $\sigma = 1,5$
- a. $P(Z \leq 9) = 0,52$;
 - b. $P(9 \leq Z \leq 15) = 0,95$;
 - c. $P(Z \geq 15) = 0,48$.

Exercice 2**6 points**

On considère deux variables aléatoires T_1 et T_2 prenant respectivement pour valeurs le temps de bon fonctionnement (sans panne), en heures, de composants électroniques de type A et de type B. On suppose que T_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0,0011$ et T_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ_2 .

1. Quelle est la probabilité qu'un composant de type A soit encore en état de marche après 1 000 h de fonctionnement? Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} près.
2. Le temps moyen de bon fonctionnement d'un composant de type B est 1 250 heures. En déduire la valeur de λ_2 .
3. Déterminer à partir de combien d'heures de fonctionnement 70% des composants de type A ont eut leur première défaillance. Donner la valeur exacte puis arrondie à l'heure près.

4. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Dans cette question on prend $\lambda_2 = 0,0008$. On constitue un système S associant en série un composant de type A et un composant de type B. Ce système est défaillant dès que l'un ou l'autre des composants est défaillant.

On suppose que les composants A et B fonctionnent de façon indépendante, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, $P(T_1 \geq t \cap T_2 \geq t) = P(T_1 \geq t) \times P(T_2 \geq t)$.

Montrer que la variable aléatoire T qui à un système s pris au hasard, fait correspondre son temps de bon fonctionnement, suit une loi exponentielle et déterminer le temps moyen de bon fonctionnement d'un système S . Donner la valeur exacte puis arrondie à l'heure près.

Exercice 3**8 points**

Une entreprise met au point de nouvelles batteries de smart-phones, appelées batteries de type T, dont l'autonomie en communication est supérieure à celle des batteries usuelles mais encore très irrégulière d'une batterie de type T à une autre. Une batterie étant choisie au hasard dans le stock de batterie de type T l'entreprise, on admet que son autonomie en heures est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $m = 22$ et d'écart-type $\sigma = 6$. On choisit au hasard une batterie de type T dans le stock de l'entreprise.

1. Les batteries les plus répandues sur le marché ont une autonomie de communication de 14 heures. Déterminer la probabilité $P(X \leq 10)$ que l'autonomie de la batterie de type T soit inférieure à 14 heures.
2. Les meilleures batteries actuelles sur le marché ont une autonomie en communication d'environ 18 h. Déterminer la probabilité que la batterie de type T choisie au hasard soit plus performante qu'une de ces meilleures batteries actuelles.
3. Donner un réel h tel que : $P(22 - h \leq X \leq 22 + h) \approx 0,95$. Quelle interprétation peut-on donner?

4. L'entreprise continue à améliorer ses nouvelles batteries avec l'objectif que 99,7 % de la future production ait une autonomie comprise entre 21 et 23 heures pour une autonomie moyenne de 22 heures.
Si X suit une loi normale d'espérance 22 et d'écart-type σ , donner une valeur approchée de σ pour que cet objectif de 99,7 % soit réalisé.

Spécialité S.I.N.

Exercice 1

10 points

Partie A

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1.

Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00.

On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres.

On considère les événements suivants :

- E_1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E_2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E_3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E_4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.

Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. La probabilité de l'évènement E_1 est égale à :

- 0,01
- 0,09
- 0,99
- 0,81

2. Si l'évènement E_2 est réalisé, le signal reçu est :

- 00
- 10
- 01
- 11

3. La probabilité de l'évènement E_2 est égale à :

- 0,19
- 0,09
- 0,81
- 0,90

4. La probabilité de l'évènement E_3 est égale à :

- 0,01
- 0,09
- 0,99
- 0,81

5. La probabilité de l'évènement E_4 est égale à :

- 0,19
- 0,11
- 0,20
- 0,91

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est 0,1.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.
- b. On a représenté dans le tableau suivant la table de la loi X .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,349	0,387	0,194	0,057	0,011	0,001	0	0	0	0	0

Calculer à 0,01 près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.

- c. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission à 0,01 près.
2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

On effectue alors une estimation des pertes de données après une expérimentation sur une suite de 2000 bits, on obtient une fréquence d'erreur de 0,002

- a. Déterminer un intervalle de confiance, au seuil de 95 %, de la fréquence obtenue par expérimentation.
- b. Après de nombreuses estimations on admet que la probabilité de perte d'un bit est de 0,002. Un client souhaitant installer ce système sur son installation, il veut qu'on lui garantisse une perte de donnée inférieure à 1 bit sur 1000. Peut-on raisonnablement certifier au client avec un degré de confiance de 95 % de telles performances au client ?

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

Exercice 2

4 points

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire U , exprimée en volts. On admet que U suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 0,7. Pour

envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à $4 + U$. La table de la loi de U est donnée dans le tableau suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$P(X \leq x)$	0,002	0,016	0,077	0,238	0,5	0,762	0,923	0,984	0,998

- Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de transmission ?
- Donner un intervalle de fluctuation contenant 95 % des tensions des erreurs causées par les bruits aléatoires.