

RÉVISION

Suites et Algorithmes

Exercice 1

4 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

Exercice 2

4 points

Une entreprise a produit 2 500 pièces d'un système électronique de communication en 2012.

Comme perspective de développement, la direction décide d'augmenter de 5% la production chaque année. Dans le but de doubler la production au bout d'une dizaine d'année.

On note P_n la production de pièce communicante de l'année $(2012 + n)$.

- Justifier que P_n est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- En déduire que pour tout entier naturel n :

$$P_n = 2500 \times 1,05^n$$

- On souhaite écrire un algorithme affichant, l'année pour laquelle la production aura doublée. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : u est un réel n est un entier naturel Début de l'algorithme : u prend la valeur 2500 Tant que $u < 5000$ u prend la valeur $1,05 \times u$ Fin tant que Afficher n Fin algorithme	Variables : u est un réel n est un entier naturel Début de l'algorithme : u prend la valeur 2500 Tant que $u < 5000$ Afficher u u prend la valeur $1,05 \times u$ Fin tant que Fin algorithme	Variables : u est un réel n est un entier naturel Début de l'algorithme : u prend la valeur 2500 Tant que $u < 2500$ Afficher n u prend la valeur $1,05 \times u$ Fin tant que Afficher u Fin algorithme

- Quelle est la limite de la suite u_n ? Justifier.
- Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 3

6 points

On considère la suite w_n définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$w_n = \frac{100}{n} + 3.$$

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Quelle est la limite de la suite w_n ?
- Lequel de ces trois algorithmes permet pour une valeur de p donnée de déterminer le rang à partir duquel la suite vérifie $|w_n - 3| < 10^{-p}$

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : w est un réel p et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire p n prend la valeur 1 w prend la valeur 103 Tant que $ w - 3 < 10^{-p}$ w prend la valeur $\frac{100}{n} + 3$. Fin tant que Afficher n Fin algorithme	Variables : w est un réel p et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire p n prend la valeur 1 w prend la valeur 103 Tant que $ w - 3 > 10^{-p}$ w prend la valeur $\frac{100}{n} + 3$. Fin tant que Afficher n Fin algorithme	Variables : w est un réel p et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire p n prend la valeur 1 w prend la valeur 103 Tant que $ w - 3 \geq 10^{-p}$ w prend la valeur $\frac{100}{n} + 3$. Fin tant que Afficher u Fin algorithme

- Programmer cette algorithme dans votre calculatrice et donner ce que renvoie la calculatrice lorsque $p = 3$.

5. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 4**6 points**

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année $(2013 + n)$.

On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables :
U, N

Initialisation :
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N

Traitement :
Tant que U < 100
 U prend la valeur $U \times 0,95 + 6$
 N prend la valeur $N + 1$
Fin du Tant que

Sortie
Afficher N.

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

RÉVISION

Probabilité - estimation et prise de décision

EXERCICE 1**5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.
 - a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.
 - b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.
2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
 Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.
 - a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
 - b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.
 Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
 - c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Exercice 2**8 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millièm.
- Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
 3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

EXERCICE 3

5 points

Une entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

2. Justifier que l'on peut approcher la variable aléatoire X par une loi normale dont précisera ces paramètres (Espérance et Écart-type) .

On note Y la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 3,23$.

On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Y < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$P(Y < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

RÉVISION Fonction

EXERCICE 1

8 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

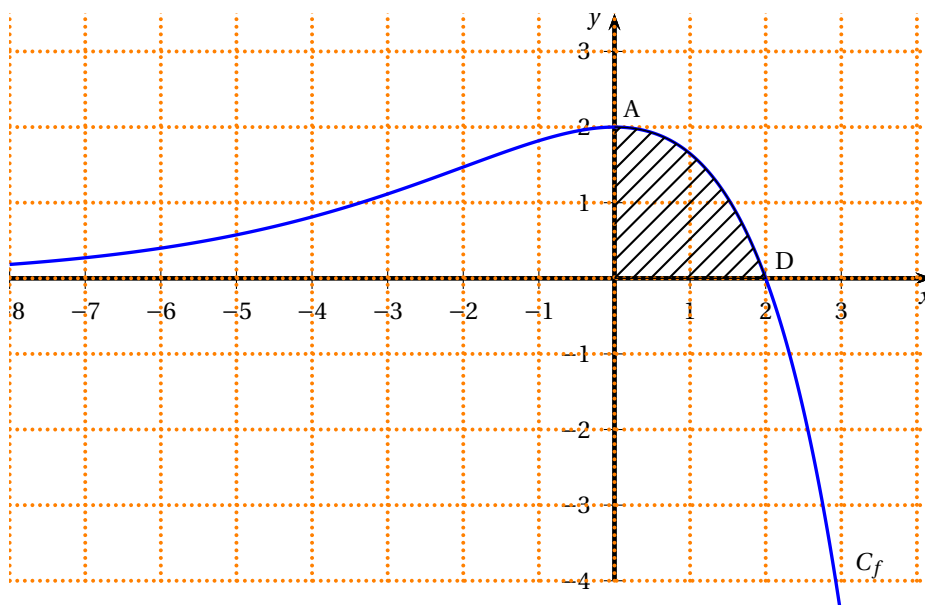


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b-x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes. On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur \mathbb{R} .

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b-2 &= 0 \\ ab-1 &= 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. a. On considère F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-2x+8)e^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

- b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x) dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère une autre primitive de f sur \mathbb{R} .
 Parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G .
 Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

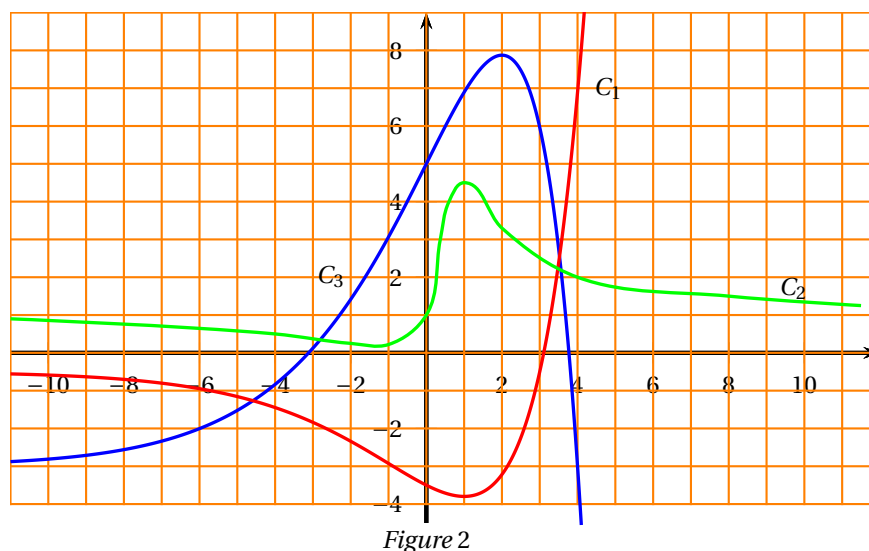


Figure 2

Exercice 2

6 points

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5; 60]$ par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .

Montrer que, pour tout $x \in [5; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[5; 60]$ par

$$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20.$$

- Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5; 60]$.
 - On admet que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5; 60]$.
Donner un encadrement à l'unité de α .
 - En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5; 60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5; 60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
- $C(x) = 2$.
 - $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5; 60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

EXERCICE 3**8 points**

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par

$$f(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
2. On admet que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0; 6]$.
Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.
3. On admet que la fonction F définie sur $[0; 6]$ par $F(x) = x + (x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0; 6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \int_0^6 f(x) dx$.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.

$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

PARTIE C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.