

Rappel de Seconde

I. Définition et premières propriétés

a. Vocabulaire

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne prédire le résultat.

Exemple : lancer une pièce de monnaie, un dé, le tirage du loto, la durée de vie d'un appareil électronique sont des expériences aléatoires.

Définition : On appelle **issue** d'une expérience aléatoire un résultat de celle-ci.

Définition : On appelle **univers** et on note Ω (Oméga) l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Lorsqu'on lance

- une pièce de monnaie les issues sont PILE ou FACE, et $\Omega = \{PILE ; FACE\}$
- un dé à 6 faces (cubique) les issues sont les nombres de 1 à 6, et $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Définition : On appelle **évènement** un sous ensemble de l'univers Ω .

Remarque : on dit que Ω est l'**évènement certain**.

Exemple : Lorsqu'on lance un dé cubique, un évènement A est : « faire un nombre paire » et on note $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, un évènement B est « obtenir 6 » et on note $B = \{6\}$.

Définition : On appelle **évènement élémentaire** un évènement formé d'une seule issue de Ω .

Remarque : B est un évènement élémentaire car il n'est constitué que d'une seule issue.

b. Probabilité

Définition : La fréquence de réalisation d'une issue, lorsqu'une expérience aléatoire est reproduite un très grand nombre de fois, se stabilise autour d'un nombre p . p est la **probabilité** de l'issue.

Exemples :

La probabilité d'obtenir *FACE* lorsqu'on lance une pièce de monnaie est de $\frac{1}{2}$; on note $p(FACE) = \frac{1}{2}$.

La probabilité de l'évènement B « obtenir 6 lorsqu'on lance un dé » est de $\frac{1}{6}$; on note $p(6) = \frac{1}{6}$ ou $p(B) = \frac{1}{6}$.

Propriétés (conséquences immédiates déduites de la définition de fréquence) :

- La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité de l'univers Ω est 1.
- La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires (ou issues) de Ω est égale à 1.

☞ **Exemple** : L'évènement « obtenir un nombre entre 1 et 6 lorsqu'on lance un dé » est l'évènement certain Ω , donc sa probabilité est égale à 1.

II. Equiprobabilité

☞ **Définition** : Si les évènements élémentaires ont tous la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.

Propriété : La probabilité d'un évènement élémentaire est :

$$p = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

La probabilité d'un évènement A est :

$$p = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

☞ **Exemple** : Tirage d'une carte de cœur dans un jeu de 32 cartes est $p(\text{cœur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$

III. Intersection (\cap) et réunion (\cup) d'évènements.

☞ **Définitions** :

L'évènement $A \cap B$ (A inter B) est formé des issues qui réalisent à la fois A et B .

L'évènement $A \cup B$ (A union B) est formé des issues qui réalisent A ou B .

Propriété : La probabilité de l'union de deux évènements A ou B est donnée par la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B).$$

☞ **Exemple** : On lance un dé cubique bien équilibré, soit A et B les évènements :

A : « Obtenir un nombre impair » (noté $A = \{1 ; 3 ; 5\}$)

B : « Obtenir un 3 ou un 6 » (noté $B = \{3 ; 6\}$)

Alors l'évènement $A \cup B$ est : « Obtenir un nombre impair ou un 6 », c'est-à-dire $A =$

$\{1; 3; 5; 6\}$, il est constitué de 4 issues équiprobables donc sa probabilité $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;
et l'événement $A \cap B$ est : « obtenir un 3 » c'est-à-dire $B = \{3\}$ de probabilités $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

La calcul en utilisant la formule précédente donne :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Représentation : Afin de modéliser le dénombrement de ces évènements, on représente les situations dans des tableaux d'effectif ou avec des diagrammes de Venn (les pommes de terres).

IV. Evènements incompatibles, évènements contraire

a. Evènements incompatibles

Définition : On dit que deux évènements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. On note $A \cap B = \emptyset$ (le vide).

Exemple : On lance un dé cubique bien équilibré, soit A et B les évènements :

A : « Obtenir un nombre impair » (noté $A = \{1; 3; 5\}$)

B : « Obtenir un 6 » (noté $B = \{6\}$)

Il est impossible que les évènements se réalise en même temps. Donc l'évènement $A \cap B$ noté \emptyset est appelé **évènement impossible**.

Propriété : La probabilité de deux évènements incompatibles est nulle. ($p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$)

b. Evènements contraires

Définition : On appelle contraire d'un évènement A l'évènement noté \bar{A} (A barre) l'ensemble des évènements qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Remarque : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ d'où on déduit la propriété suivante :

Propriété : La probabilité de l'évènement contraire est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

V. Intervalle de fluctuation et intervalle de confiance

Dans la pratique, on ne peut pas mesurer avec exactitude la proportion d'un caractère dans la population (intention de vote pour un candidat lors d'une élection - nombre de personne ayant regarder une émission de télévision samedi soir...). Pour réaliser ce type de mesure, les statisticiens mesurent le caractère en question sur une petite partie de la population (suffisamment grande **un échantillon**) et en mesurer les fréquences. On parle de **fluctuation d'échantillonnage**.

a. Intervalle de fluctuation

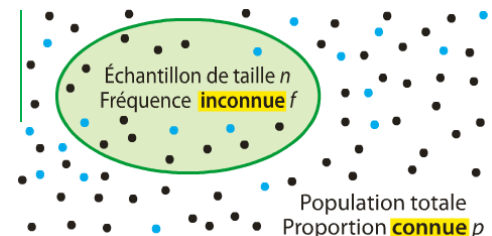
Lors de la simulation d'une expérience aléatoire sur ordinateur, on observe que les fréquences des échantillons créés fluctuent autour de la probabilité.

Définition : (Lorsqu'on connaît la proportion du caractère dans la population p)

On définit l'**intervalle de fluctuation** au seuil de 95% pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et pour p compris entre 0,2 et 0,8 par :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

On admet que pour de tels échantillons la fréquence d'apparition f observé appartient à l'intervalle de fluctuation avec une probabilité d'au moins 0,95.



b. Intervalle de confiance

Définition : (Lorsqu'on ne connaît pas la proportion du caractère dans la population p)

On définit l'**intervalle de confiance** au seuil de 95% pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et un caractère qui apparaît avec une fréquence f comprise entre 0,2 et 0,8 par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

On peut estimer que la proportion p du caractère dans la population totale est dans l'intervalle de confiance avec une probabilité d'au moins 0,95.

ATTENTION : dans 5% des cas, l'intervalle de confiance ne contient peut-être pas p .

On parlera quelques fois de « preuve statistique ».

Le cours de première

📖 Activité introductive : Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1) Préciser l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

2) Quelle est la probabilité de l'événement A « obtenir un 7, un 8, un 9, ou un 10 » ?

On convient que pour jouer la mise est de 5 euros et que le joueur gagne 5 euros si la carte tirée est une figure (valet, dame ou roi), 10 euros si c'est un as, et 0 euro dans les autres cas. De plus cette somme est doublée lorsque la carte est un cœur.

3) Déterminer quel peut être le gain (positif négatif ou nul), du joueur en tenant compte de la mise qu'il ne récupère pas.

4) On désigne par X le procédé qui, selon la règle du jeu, associe à chaque élément de Ω le gain algébrique du joueur. On a donc X (« huit de cœur ») = ... ; X (« roi de cœur ») = ...
Quel « objet mathématique » reconnaissez-vous dans X ?

5) On note $(X = -5)$ l'événement « le gain est -5 euros ».

Quel lien existe-t-il entre A et $(X = -5)$? En déduire $P(X = -5)$.

6) Pour chacune des autres valeurs x_i prise par X , calculer la probabilité $P(X = x_i)$.

7) Calculer la somme des probabilités $P(X = x_i)$. Doit-on s'en étonner ?

I. Variable aléatoire discrète

a. Variable aléatoire

📖 **Définition** : On appelle variable aléatoire réelle le résultat d'une expérience lorsqu'il est représenté par un nombre réel. Autrement dit, une variable aléatoire réelle est une fonction X définie sur Ω à valeur dans \mathbb{R} :

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_k \mapsto X(\omega_k) = x_i \end{cases}$$

où $X(\Omega)$ est appelé univers image : c'est l'ensemble des valeurs prises par X .

b. Loi de probabilité

📖 **Définition** : Définir une loi de probabilité sur l'ensemble des n valeurs x_i , c'est associer à chaque x_i sa probabilité p_i .

Remarque : p_i se note également $P(X = x_i)$ (la valeur prise par la variable aléatoire X est x_i).

En pratique, on peut représenter la loi de X sous forme d'un tableau, avec pour chaque valeur x_i prise par X , la valeur $p(x_i)$ correspondante.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

II. Loi binomiale

a. Epreuve de Bernoulli

Définition : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : pile ou face, oui ou non, gagner ou perdre, etc.

On notera S le succès et E l'échec, les deux issues d'une épreuve de Bernoulli, on note en générale $P(S) = p$ et $P(E) = q = 1 - p$.

b. Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition : La variable aléatoire qui associe le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli réalisé un nombre n donné de fois de manière indépendante suit une loi binomiale.

Notation : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n le nombre de fois que l'on réalise l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité du succès de cette épreuve.

Théorème : Pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ la probabilité d'obtenir k succès en réalisant n fois l'expérience est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

III. Intervalle de confiance

a. Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition : La variable aléatoire qui associe le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli réalisé un nombre n donné de fois de manière indépendante suit une loi binomiale.