

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f .

$$f'(x) = 2x - 1.$$

Pour déterminer le tableau de variations de la fonction f , on doit connaître le signe de la dérivée.

$$\text{Posons } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Donc la dérivée est positive lorsque $x > \frac{1}{2}$ et est négative sinon. Le tableau de variation obtenu :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

2. a. Sur la calculatrice, le tableau de valeurs de $f(x)$ à partir 0 avec un pas de 10 est :

```
TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=10
Indent: Auto Ask
Depend: Auto Ask
```

X	Y1
0	0
10	90
20	380
30	870
40	1560
50	2450
60	3540

X	Y1
50	2450
60	3540
70	4830
80	6320
90	8010
100	9900
110	11990

- b. On remarque que lorsque $x = 110$, $f(x) = 11\,990$. Comme d'après la question 1. la fonction est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$, on déduit qu'à partir de 110 ($x > 110$) on a $f(x) > 10^4$.

- c. Avec un pas de 100 on obtient :

X	Y1
0	0
100	9900
200	39800
300	89700
400	159600
500	249500
600	359400

X	Y1
600	359400
700	489300
800	639200
900	809100
1000	999000
1100	1198900
1200	1408800

Avec un pas de 100 dans la calculatrice, et pour la même raison que la fonction f est croissante, on trouve on déduit qu'à partir de 1 100 ($x > 1\,100$) on a $f(x) > 10^6$.

- d. On conjecture donc que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. a. Soit k un entier naturel. On résout l'équation :

$$x^2 - x - 10^k = 0$$

Pour se faire on calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-10^k) = 1 + 4 \times 10^k$.

Δ est strictement positif, donc l'équation admet 2 solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2}$$

On peut représenter la situation dans le tableau de variation obtenu à la question 1 :

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	10^k	$-\frac{1}{4}$	10^k	$+\infty$

Ou remarquer que sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ l'inéquation $f(x) > 10^k$ est équivalente à

$x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2}$ car la fonction f est croissante sur cet intervalle.

Ceux qui justifie qu'il existe une valeur de x ($x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \times 10^k}}{2}$) à partir de laquelle $f(x) > 10^k$.

b. On déduit donc que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$