

Baccalauréat STI2D SIN
Correction du Examen Blanc 2
du 23 avril 2013

Le sujet comporte 3 exercices et 1 problème. La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

4 points

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entiers naturels. u est un réel.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 000.
Traitement :	Tant que $n < 5$ u prend la valeur $u + 50$ n prend la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher u .

1. Faire fonctionner cet algorithme « à la main ». Quels résultats obtient-on ?
L'algorithme renvoie la valeur $u_5 : 1250$
2. Marvin place un capitale de 1 000 € sur un livret à 3 % d'intérêts annuels pendant 4 ans.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche les sommes obtenues, capitale et intérêts compris, à la fin de chacune des 4 années.

Variables :	n est un entiers naturels. u est un réel.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 000.
Traitement :	Tant que $n < 5$ u prend la valeur $u \times 1,03$ n prend la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher u

3. Marvin se demande au bout de combien d'années la somme obtenue dépasserait les 2000 €. Écrire un algorithme qui permette de le déterminer.

Variables :	n est un entiers naturels. u est un réel.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 000.
Traitement :	Tant que $u < 2000$ u prend la valeur $u \times 1,03$ n prend la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n

4. Par le calcul déterminer la réponse de la question précédente.
Pour trouver la réponse à la question précédente, on résout l'inéquation :
 $u_n > 2000$

$$\begin{aligned}u_n > 2000 &\Leftrightarrow 1000 \times 1,03^n > 2000 \\&\Leftrightarrow 1,03^n > 2 \\&\Leftrightarrow \ln(1,03^n) > \ln(2) \\&\Leftrightarrow n \ln(1,03) > \ln(2) \\&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)}\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \simeq 23,5$.

Donc il faudra 24 ans pour que la somme atteigne 2000.

Et $u_{24} \simeq 2032,8$.

EXERCICE 2**4 points**

L'état de surface d'une découpe effectuée par électroérosion est défini par un numéro, appelé « numéro Charmille » ($N^\circ \text{ CH}$), dépendant de la rugosité selon la formule $N^\circ \text{ CH} = 20 \times \log(10 \times R)$,

où R est la rugosité exprimée en micromètres. L'objectif est de déterminer la rugosité R_0 exprimé en micromètre (μm) correspondant à un numéro de Charmille égal à 15.

On désigne par f la fonction qui à tout réel de l'intervalle $[0, 1 ; 1]$ associe le réel : $f(R) = 20 \times \log(10 \times R)$.

1. a. Calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1 ; 1]$.

$$f(R) = 20 \frac{\ln(10R)}{\ln(10)} = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10R).$$

On utilise la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$$f'(R) = \frac{20}{\ln(10)} \frac{10}{10R} = \frac{20}{\ln(10) \times R}$$

- b. Donner le signe de la dérivée sur l'intervalle $[0, 1 ; 1]$.

Pour trouver le signe de la dérivée, on résout l'inéquation $f'(R) > 0$.

$$\begin{aligned} f'(R) > 0 &\Leftrightarrow \frac{20}{\ln(10) \times R} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{R} > 0 \end{aligned}$$

La fonction $R \mapsto \frac{1}{R} > 0$ est toujours positive lorsque $R \in [0, 1 ; 1]$.

Donc la fonction dérivée $R \mapsto f'(R)$ est toujours positive sur $[0, 1 ; 1]$.

- c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1 ; 1]$.

R	0.1	1
$f'(R)$	+	
$f(R)$	0	20

2. On a représenté dans le tableau suivant les valeurs de la fonction f avec un pas de 0,1.

x	20*log(10*x)
0,1	0
0,2	6,020599913
0,3	9,542425094
0,4	12,04119983
0,5	13,97940009
0,6	15,56302501
0,7	16,9019608
0,8	18,06179974
0,9	19,08485019
1	20

Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de R_0 .

L'énoncé précise : L'objectif est de déterminer la rugosité R_0 exprimé en micromètre (μm) correspondant à un numéro de Charmille égal à 15. Le problème

revient à résoudre l'équation $f(R) = 15$.

D'après le tableau des valeurs de la fonction f , on donne un encadrement de R_0 :

$$0,5 \leq R_0 \leq 0,6.$$

Donc pour obtenir un numéro de Charmille égale à 15, il faut que la rugosité soit comprise entre 0,5 et 0,6 μm .

3. Par la calcul, déterminer une valeur exacte de R_0 .

On résout l'équation $f(R) = 15$:

$$\begin{aligned} f(R) = 15 &\Leftrightarrow 20 \times \log(10 \times R) = 15 \\ &\Leftrightarrow \log(10 \times R) = \frac{15}{20} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(10R)}{\ln(10)} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(10R) = \frac{3\ln(10)}{4} \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(10R)} = e^{\frac{3\ln(10)}{4}} \\ &\Leftrightarrow R = \frac{e^{\frac{3\ln(10)}{4}}}{10} \end{aligned}$$

A la calculatrice une approximation de R est : $R \simeq 0,562$

Donc pour obtenir un numéro de Charmille égale à 15, il faut que la rugosité d'environ 0,562 μm .

Formulaire : On rappelle que pour tout nombre réel x strictement positif

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

EXERCICE 3

4 points

On note f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} par $f(x) = (x-2)e^{-x}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (1-x)e^{-x}$, est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Soit x un nombre réel, dérivons la fonction F :

$$F'(x) = -1e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x} = f(x).$$

2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 2.

On note $A(a)$ l'aire exprimée en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=a$.

- a. Montrer que $A(a) = e^{-a} - ae^{-a} + e^{-2}$.

$$\begin{aligned} A(a) &= \int_2^a f(x) dx \\ &= [F(x)]_2^a \\ &= F(a) - F(2) \\ &= (1-a)e^{-a} - (1-2)e^{-2} \\ &= e^{-a} - ae^{-a} + e^{-2}. \end{aligned}$$

- b. Déterminer la limite éventuelle de $A(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Pour déterminer cette limite, on utilise la formule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

D'où on déduit que : $\lim_{a \rightarrow +\infty} ae^{-a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} = 0$.

Donc on conclut que :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = e^{-2}.$$

PROBLÈME

8 points

Dans ce problème, les quatre parties sont indépendantes. La **PARTIE D** est facultative et sera évalué comme un exercice bonus.

Dans ce problème, on s'intéresse à une entreprise fabricant un certain type de condensateurs de capacité $C = 220 \mu\text{F}$.

PARTIE A(soumis à un courant continu.)

Dans cette partie, on s'intéresse à la charge du condensateur monté en série d'une résistance R et d'un générateur de courant continu.

On admet que la tension aux bornes du condensateurs vérifie l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + 45y = 500.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies sur \mathbb{R} par :

$$y(x) = \lambda e^{-45x} + \frac{500}{45} = \lambda e^{-45x} + \frac{100}{9}$$

avec λ une constante réelle.

2. Lorsque le circuit est mise en route, la tension au borne du condensateur est nulle. La fonction y solution vérifie alors $y(0) = 9$.

Déterminer alors l'unique solution de (E) .

Réolvons l'équation en $\lambda y(0) = 9$:

$$\begin{aligned} y(0) = 9 &\Leftrightarrow \lambda e^{-45 \times 0} + \frac{100}{9} = 9 \\ &\Leftrightarrow \lambda e^0 = 9 - \frac{100}{9} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{19}{9} \end{aligned}$$

Donc l'unique solution de l'équation différentielle (E) est la fonction y définie que \mathbb{R} par :

$$y(t) = -\frac{19}{9}e^{-45t} + \frac{100}{9}$$

PARTIE B(soumis à un courant alternatif)

Dans cette partie, on s'intéresse à ce condensateur branché à un générateur de courant alternatif produisant une tension u vérifiant $u(t) = 20\sqrt{2}\sin(200\pi t)$. On rappelle la relation $i(t) = C \frac{du}{dt}$.

1. Déterminer l'intensité $i(t)$ au bornes du condensateur.

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} \\ &= 220 u'(t) \\ &= 220 \times 10^{-6} \times 20\sqrt{2} \times 200 \times 10^{-6} \cos(200\pi t) \\ &= 0,44\sqrt{2} \cos(200\pi t) \end{aligned}$$

2. Montrer que la fonction i peut s'écrire sous la forme :

$$i(t) = 0,44\sqrt{2} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

En utilisant la formule $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient :

$$i(t) = 0,44\sqrt{2} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

3. on appelle j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On rappelle la notation complexe pour des courants et des intensités suivant des fonctions de la forme :

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \text{ et } i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi')$$

$$\text{sont } \underline{U} = U\sqrt{2}e^{j\varphi} \text{ et } \underline{I} = I\sqrt{2}e^{j\varphi'}.$$

On rappelle enfin que l'impédance noté \underline{Z} est donnée par la formule :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

- a. Calculer sous forme exponentielle l'impédance du condensateur.
D'après les formules rappelés ici, on a :

$$\underline{U} = U\sqrt{2}e^{j\varphi} = 20\sqrt{2}e^{j \times 0} = 20\sqrt{2}$$

et :

$$\underline{I} = 0,44\sqrt{2}e^{j\varphi'} = 0,44\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = 0,44\sqrt{2}j$$

On calcul alors l'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20\sqrt{2}e^0}{0,44\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{500}{11}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

- b. En déduire que la forme algébrique de l'impédance est : $\underline{Z} = \frac{1}{4400\pi j}$.

$$\underline{Z} = \frac{500}{11}e^{-j} = -j\frac{500}{11}.$$

- c. Déterminer le module de ce nombre complexe.

$$|\underline{Z}| = \left| -j\frac{500}{11} \right| = \frac{500}{11}.$$

PARTIE C (Durée de vie.)

Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ces condensateurs.

On suppose que la durée de vie T d'un condensateur en heure de fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0004$

- Déterminer la probabilité que la durée d'un condensateur prélevé au hasard dans la production soit :
 - inférieur à 3000 h.

$$P(T \leq 3000) = 1 - e^{-0,0004 \times 3000} = 1 - e^{-1,2} \simeq 0,698.$$

- supérieur à 2500 h.

$$P(T \geq 2500) = 1 - P(T \leq 2500) = 1 - (1 - e^{-0,0004 \times 2500}) = e^{-1} \simeq 0,368$$

- Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0004} = 2500.$$

- Dans cette question toutes trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Une entreprise décide dans son plan de maintenance de remplacer le condensateurs avant qu'il y ait 66 % de chance qu'il tombe en panne.

Au bout de combien de temps devra-t-elle changer se composant ?

Le problème revient à chercher un réel strictement positif vérifiant :

$$P(T \leq t) = 0,66.$$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) = 0,66 & \iff 1 - e^{-0,0004t} = 0,66 \\ & \iff -e^{-0,0004t} = -0,34 \\ & \iff e^{-0,0004t} = 0,34 \\ & \iff -0,0004t = \ln(0,34) \\ & \iff t = -\frac{\ln(0,34)}{0,0004} \end{aligned}$$

Donc au finale pour $P(T \leq t) = 0,66$ on trouve $t \approx 2697$.

Il faudra donc changer le condensateur avant la 2697^{ème} heure de fonctionnement.

PARTIE D (Capacité réel.)

Facultatif

On appelle X la variable aléatoire qui associe, à un condensateur choisi au hasard dans la production, sa capacité réelle en μF . On admet de X suit une loi normale d'espérance 220 et d'écart-type 12.

1. On prélève au hasard un condensateur dans la production. Déterminer à 10^{-3} près la probabilités que la capacité réelle soit :

- a. inférieur ou égale à 210 μF .

$$P(X \leq 210) = 0,5 - P(210 \leq X \leq 220) \approx 0,5 - 0,298 \approx 0,202$$

- b. supérieur ou égale à 215 μF .

$$P(X \geq 215) = 0,5 + P(215 \leq X \leq 220) \approx 0,5 + 0,162 \approx 0,662$$

2. Donner un intervalle de la capacité réelle dans laquelle se situe environs :

- a. 68 % des condensateurs.

Un intervalle contenant 68% des condensateurs est donné par $[m - \sigma ; m + \sigma]$. Donc l'intervalle est :

$$I_{68} = [220 - 12 ; 220 + 12] = [208 ; 232].$$

- b. 95 % des condensateurs.

Un intervalle contenant 95% des condensateurs est donné par $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$. Donc l'intervalle est :

$$I_{95} = [220 - 2 \times 12 ; 220 + 2 \times 12] = [196 ; 244].$$