Exercice 1

Dans chaque cas justifier que la fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire ; puis en donner sa période s'il y a lieu.

1. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^6 - 19}$.
2. $g(x) = \ln|x| + x^4 - 5$.
3. $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
4. $i(x) = \arctan(x)$.
5. $j(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
6. $k(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
7. $l(x) = \cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 2

Monsieur Sphéro, architecte, souhaite répondre à un appel d'offre concernant la construction d'une salle de spectacle. Inspiré par son nom, il souhaite proposer une salle sphérique. Avant de se lancer dans les détails, il voudrait une approximation de la taille maximale possible d'un écran de cinéma dans ce type de salle. Voici le petit schéma qu'il fournit à Mathéo son assistant.

$[AB]$ est un segment tel que $AB = 10$ m.

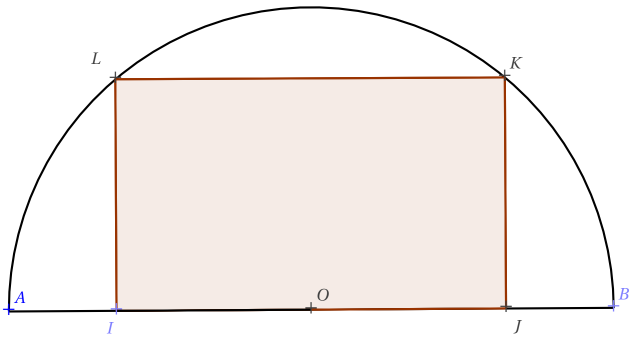
O est le milieu de $[AB]$.

I est un point mobile sur $[OB]$.

On construit alors le rectangle $IJKL$ tel que $OJ = OI$ et K et L soient sur le cercle de diamètre $[AB]$.

On pose $x = OI$.

On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle $IJKL$.



1. Expliquer pourquoi x varie dans $\mathscr{D}_f = [0;5]$.
2. Déterminer, en fonction de x, la longueur IL.
3. En déduire l'aire du rectangle $IJKL$ en fonction de x.
4. En utilisant la table de votre calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

5. En utilisant la table obtenue en 4. , pour quelle valeur de x l'aire semble-t-elle être maximale ?
6. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathscr{D}_f$ par :

$$f(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$$

   a. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathscr{D}_f$.

   b. Étudier le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$. Puis en déduire le tableau de variation sur $\mathscr{D}_f$.

   c. Déduire de la question précédente une réponse à la problématique de l'architecte.

Exercice 3

L'état de surface d'une découpe effectuée par électroérosion est défini par un numéro, appelé « numéro Charmille » (N° CH), dépendant de la rugosité selon la formule N° CH= $20 \times \log(10 \times R)$,
où R est la rugosité exprimée en micromètres. L'objectif est de déterminer la rugosité R_0 exprimé en micromètre (μm) correspondant à un numéro de Charmille égal à 15.
On désigne par f la fonction qui à tout réel de l'intervalle $[0,1 ; 1]$ associe le réel : $f(R) = 20 \times \log(10 \times R)$.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,1 ; 1]$.

   b. Donner le signe de la dérivée sur l'intervalle $[0,1 ; 1]$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1 ; 1]$.
2. En utilisant sur votre calculatrice le tableau de valeur de la fonction f avec un pas de $0,1$. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de R_0.

3. Par la calcul, déterminer une valeur exacte de R_0.

Formulaire : On rappelle que pour tout nombre réel x strictement positif :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

.

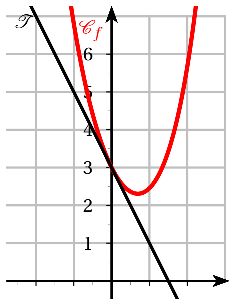
Exercice 4
Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^2+ax+b}.$$

Quelles sont les valeurs de a et b pour lesquelles le tableau de variation de g est celui donné ci-contre.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	

Exercice 5
A. Détermination d'une fonction f
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cet exercice. Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentive de la fonction f, et la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisses 0.

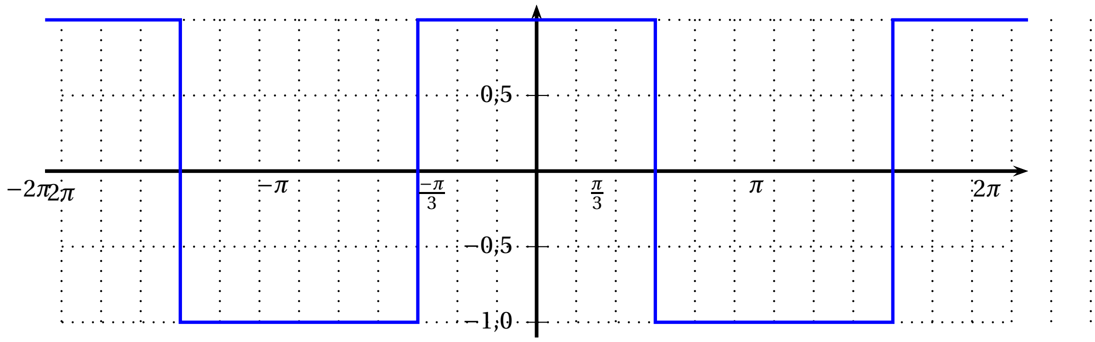


1. Par lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. **a.** Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression $f(x)$.

B. Etude de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :
$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2) = \left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right).$$
2. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e} - 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le signe de $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le sens de variation de la fonction f.

Exercice 6
Un onduleur à commande asynchrone délivre une tension périodique $f(t)$ de période 2π selon la représentation graphique suivante :



Sur les représentations graphiques, on a représenté graphiquement sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ la tension $f(t)$ et la tension $f\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Dessous, compléter le tableau de valeurs et construire la représentation graphique de la tension $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

Représentation graphique de la tension $f\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

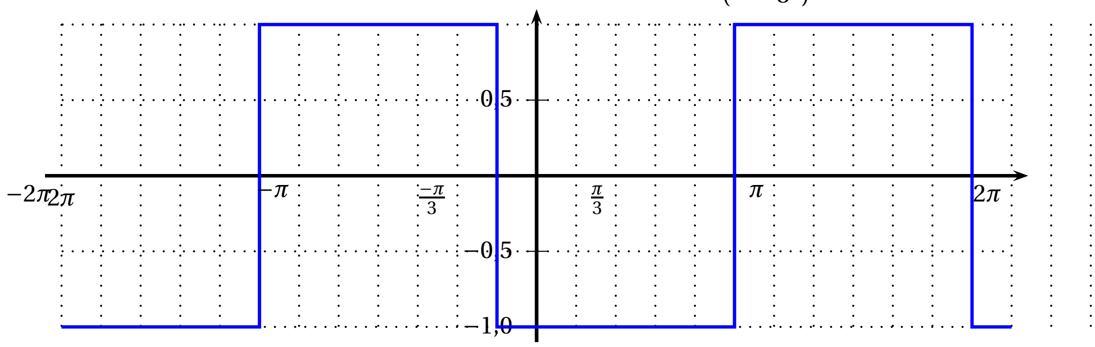
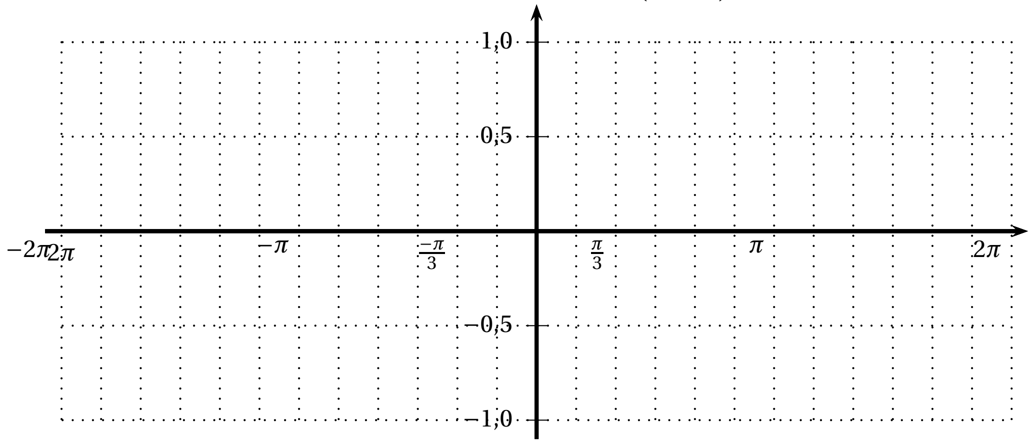


Tableau des valeurs prises par $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ pour certaines valeurs de t

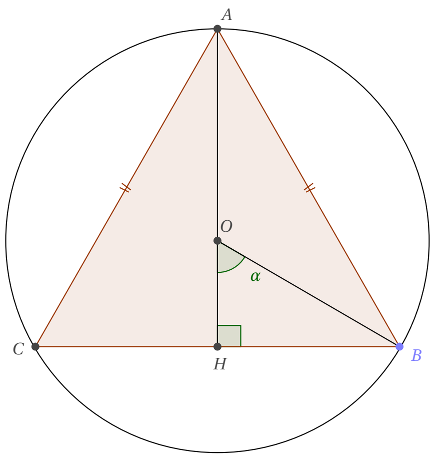
t	$-\dfrac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{3}$	π	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$		1						-1

Repère pour représenter $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$



Exercice 7

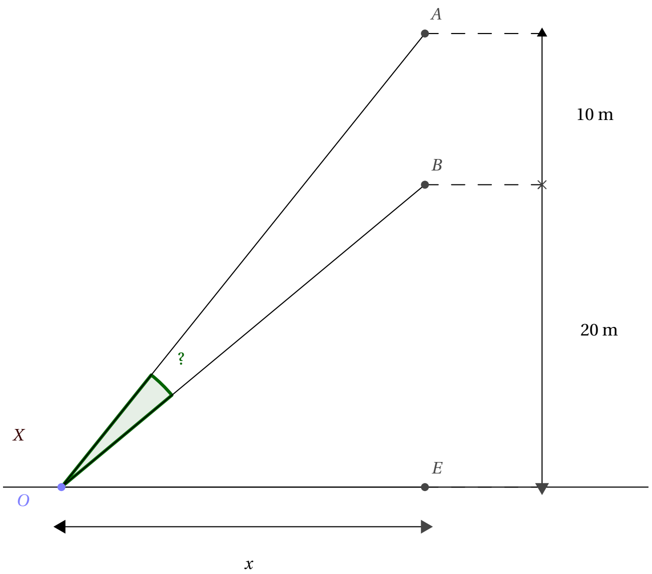
Soit $\mathscr{C}$ une cercle de centre O et de rayon 1, et ABC un triangle isocèle de sommet principal A inscrit dans $\mathscr{C}$, l'angle $\widehat{A}$ est aigu.
On appelle H le pied de la hauteur issue de A et α la mesure, en radians, de l'angle $\widehat{HOB}$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.



1. Exprimer BD et AH en fonction de α.
   En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α.
2. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :
   $$f(x) = \sin(x)\,(1+\cos(x))\,.$$
   a. Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$:
   $$f'(x) = 2\cos^2\,x + \cos\,x - 1.$$
   b. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   En déduire le tableau de variation de f.
3. Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.
   Déterminer α et le maximum de l'aire.
   Quelle est la nature du triangle ABC dans ce cas ?

Exercice 8

Une statue de 10 mètre de haut est placée sur un socle de 20 mètres de haut.
François se déplace depuis la base du socle dans la direction $\overrightarrow{EX}$; il constate que s'il est à la base, il ne voit rien. Par contre, s'il s'éloigne assez, l'angle $\widehat{AOB}$ sous lequel il voit la statue devient de plus en plus petit.
Voulant prendre une photo de la statue sous le plus grand angle possible, il se demande quelle est la position pour laquelle cet angle sera le plus grand...



Notons α l'angle $\widehat{AOB}$ recherché et β et γ les angles tel que $\beta = \widehat{BOE}$ et $\gamma = \widehat{AOB}$

1. Mise en équation

   a. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre x.

   b. Exrpimer α en fonction de β et γ.

   c. i. Donner en fonction de x une valeur de $\tan\,\beta$.

   ii. De même exprimer $\tan\,\gamma$.

   iii. Déduire des questions précédentes les valeurs des angles β et γ en fonction de x.

   d. Déduire des questions précédentes une valeur de α

   e. Une formule de mathématique dit que pour tous les nombres réels a et b :
   $$\arctan\,a - \arctan\,b = \arctan\left(\frac{a-b}{1-ab}\right).$$
   En utilisant cette formule montrer que :
   $$\alpha = \arctan\left(\frac{10x}{x^2+600}\right)$$

2. On considère la fonction f définie que par :
   $$f(x) = \frac{10x}{x^2+600}.$$
   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$.

   c. En déduire le tableau de variation sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction f.

3. Conclure.