Intégrale à paramètre

Exercice 40
Déterminer en fonction de n les intégrales suivantes :

1. $a_n = \int_0^{\pi} \cos(nt)\mathrm{d}t$;
2. $b_n = \int_0^{2\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t$;
3. $c_n = \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\mathrm{d}t$;
4. $d_n = \int_0^{2\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t$;

Équation différentielle du premier ordre

Exercice 41

Calculer le développement limité au voisinage de zéro et à l'ordre précisé pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(1-x)$ ordre 2.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ordre 3.
3. $f(x) = \sqrt{1+x}$ ordre 2
4. $f(x) = \ln(1+x) - \sin\ x$ ordre 3.

Exercice 42

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 ou 3 (selon les besoins), donner une équation de la tangente en 0 et sa position relative.

1. $f(x) = x\cos\ x$
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$

Exercice 43

Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos\ x - 1}{x}$.
2. $f(x) = \dfrac{\sin\ 2x}{x}$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Exercice 44

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - x - 1}{x} \\ f(0) = -2. \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$; en déduire l'étude de la continuité de f en zéro.
2. Etudier la dérivabilité de f en zéro.

Exercice 45

On étudie la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 5x + 5\ln(x+1)$$

Et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier la fonction f.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de zéro.
3. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x^2$.
   Étudier les position relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ au voisinage du point O.

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur$\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 0$
4. Donner un développement limité d'ordre 3 de $f(x) - (-x+2)$ au voisinage de 0 ; en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$ pour x au voisinage de 0.

Équation différentielle du premier ordre

Exercice 47
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 0$;
2. $y' - 4y = 0$;
3. $2y' - 8y = 0$;
4. $y' - 3y = 0$;
5. $3y' + 12y = 0$;
6. $4y' - 14y = 0$.

Exercice 48
En cherchant une solution particulière constante (de la forme $y = k$ avec $k \in \mathbb{R}$) déterminer les solutions ses équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = 14$;
2. $y' - 2y = 8$;
3. $2y' - 8y = 6$;
4. $y' - 3y = 4$;
5. $3y' + 12y = 6$;
6. $4y' - 14y = 5$.

Exercice 49
En cherchant une solution particulière affine (de la forme $y = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) déterminer les solutions ses équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = t + 1$;
2. $y' + y = t - 2$;
3. $3y' - 6y = 6t - 3$;
4. $-y' + 3y = t + 7$;
5. $3y' + 12y = 2t + 1$;
6. $4y' - 14y = \dfrac{\pi}{7}t - 3,8$.

Exercice 50
En cherchant une solution particulière y_0 de la forme indiquée déterminer les solutions ses équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) - y(t) = 2\cos t$
   $y_0(t) = a\cos t + b\sin t$;
2. $y(t) + y(t) = 8\mathrm{e}^{3t}$
   $y_0(t) = A\mathrm{e}^{3t}$;
3. On se propose de résoudre
   $y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{2t} + t$
   a. $y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{2t}$
   $y_0(t) = a\mathrm{e}^{2t}$
   b. $y'(t) - 2y(t) = t$
   $y_0(t) = at + b.$
   c. Déduire les solutions de l'équation de départ.

Exercice 51
En cherchant une solution particulière polynôme du second degré (de la forme $y = (at + b)\mathrm{e}^t$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) déterminer les solutions ses équations différentielles suivantes :

1. $y' + 4y = t^2 + 1$;
2. $y' - y = t^2 - 2$;
3. $2y' - 6y = 2t^2 - 6t - 3$;
4. $y' - 4y = t^2 + t + 7$;
5. $y' - 7y = 3t^2 - t + 1$;
6. $2y' + 2y = 2t^2 + 2$.

Exercice 52
Tout flux rayonnant traversant un matériau transparent, homogène et isotherme subit une absorption qui dépend de la longueur d'onde λ du rayonnement.
Le flux résiduel $\Psi(x)$ après une traversée d'épaisseur x (en mètres) vérifie la relation :

$$\Psi'(x) = -k \cdot \Psi(x)$$

où k est le coefficient d'absorption du matériau pour la longueur d'onde considérée λ et Ψ' désigne la dérivée de Ψ.

1. Déterminer $\Psi(x)$ sachant que, pour $x = 0$, le flux initial vaut Ψ_0.
2. On définit le pourcentage d'absorption de $r(x)$ par :
   $$r(x) = 100 \cdot \frac{[\Psi_0 - \Psi(x)]}{\Psi_0}$$
   Dédire du **1.** l'expression simplifié de $r(x)$.
3. **Application numérique**
   Un rayonnement de longueur d'onde comprise entre 5 et 8 μm traverse de l'aire à 20 °C et à 60 % d'humidité.
   Le coefficient d'absorption moyen vaut alors $k_1 = 0,1$.
   a. Montrer que le pourcentage d'absorption $r_1(x)$ est donnée par :
   $$r_1(x) = 100 \cdot \left[1 - \mathrm{e}^{-0,1x}\right]$$
   b. Calculer le pourcentage d'absorption du flux pour une traversé de 100 m d'épaisseur.
   c. Quelle distance doit parcourir le flux pour qu'il soit à moitié absorbé ?
4. Le même aire est maintenant traversé par un rayonnement de longueur d'onde comprise entre 8 et 13 μm. Le coefficient d'absorption moyen vaut alors $k_2 = 4,8 \cdot 10^{-4}$.
   a. Etablir l'expression du pourcentage d'absorption $r_2(x)$.
   b. Répondre aux questions **3.b.** et **3.c.** pour ce rayonnement.

Exercice 53

1. Résoudre l'équation différentielle :
   $$\varphi' + k\varphi = 0 \ \ \mathbf{(1)}$$
   où Φ est une fonction dépendant du temps t ($t \geqslant 0$), φ' sa dérivée et k une constante réelle strictement positive.
   Préciser la solution particulière φ_1 correspondant à la condition initiale $\varphi_1(0) = 2$.
2. **Application**
   Deux chercheurs ont constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps, selon la loi :
   $$g' + Kg = 0 \ \ \mathbf{(2)}$$
   où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t ($t \geqslant 0$) et K une constante réelle strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.
   a. À l'aide du **1.**, trouver l'expression de $g(t)$ à l'instant t, sachant qu'à l'instant $t = 0$, $g(0) = 2$.
   Étudier les variations de la fonction g en fonction du temps et donner l'allure de sa courbe représentative.
   Déterminer, en fonction K, l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $M(0\ ;\ 2)$ avec l'axe des temps.
   b. Trouver la formule donnant le coefficient K en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1 donné et positif.
   c. La valeur moyenne de K chez un sujet normal varie de $1,06 \cdot 10^{-2}$ à $2,42.10^{-2}$.
   Préciser si les résultats du sujet X, qui a un taux de glycémie $g_1 = 1,20$ à l'instant $t_1 = 30$, sont normaux.

Équation du second degré et solutions complexes

Exercice 54
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $2z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $z^2 + 2 = 0$
4. $z^2 = -9$