I. Variable aléatoire continue

Définition : Une variable aléatoire réelle à densité (ou continue) est une application définie sur un ensemble Ω et prenant les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

☞Exemple : Ainsi on peut dire que la fonction $Rand()$ de la calculatrice ou la fonction $alea()$, suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$. Elle renvoie de façon aléatoire aléatoire un nombre dans l'intervalle $[0\,;1]$.

Définition : Soit f une fonction continue est positive sur un intervalle $I=[a\,;b]$ telle que :

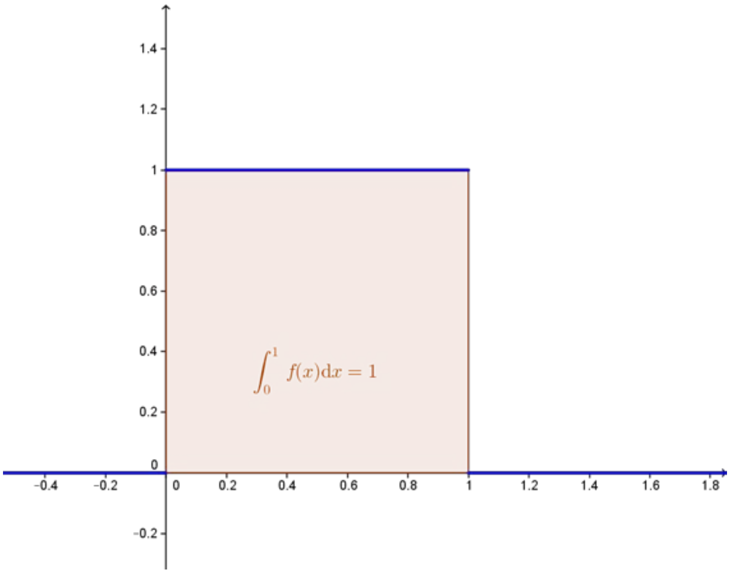
$$\int_a^b f(t)dt = 1.$$

On dit que X est une **variable aléatoire** réelle **continue** de densité f si pour tout x_1 et x_2 de I avec $x_1 \leq x_2$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\,.$$

On définit ici une loi de probabilité P continue sur I, et f est appelée **densité de probabilité** de P sur I.

☞Exemple : La fonction de densité de la loi uniforme sur $[0\,;\ 1]$ est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=1$.



Ainsi,

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1-0 = 1.$$

C'est aire du carré de côté 1.

Donc on définit bien une loi de probabilité.

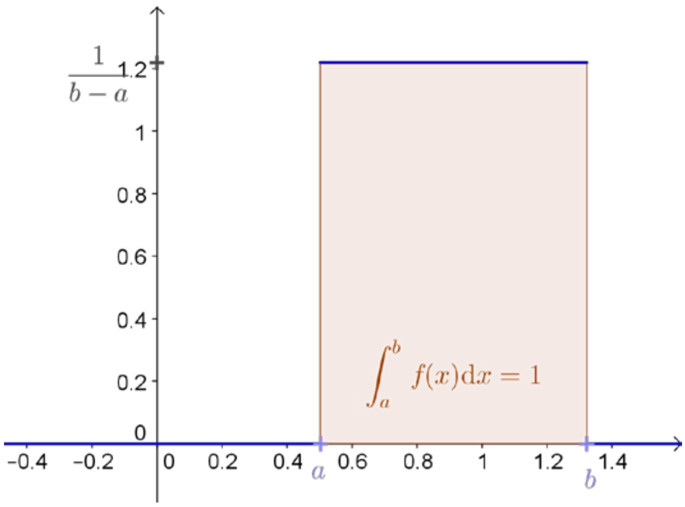
Exercices :

- Programmer un algorithme qui simule une loi uniforme sur : $[0\,;2]$, $[0\,;3]$, sur $[0\,;a]$.
- Ecrire un algorithme simulant la loi uniforme sur $[1\,;3]$, sur $[4\,;6]$ et sur $[a\,;b]$.

II. Loi uniforme sur $[a\,;b]$.

Définition : Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq b$).

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$ si, pour tout intervalle I inclus dans $[a\,;b]$, la probabilité de l'évènement « $X \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x\,;y)\,;x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$, f est la fonction constante définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.



En particulier, pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans $[a\,;b]$, on a

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x\,.$$

La fonction f définie sur $[a\,;b]$ par $f : x \mapsto \frac{1}{b-a}$ est appelée **fonction de densité de la loi uniforme sur** $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$.

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}[x]_c^d = \frac{d-c}{b-a}.$$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$, alors

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$. On appelle **espérance de** $\boldsymbol{X}$ le réel noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \int_a^b x\,f(x)\mathrm{d}x\,,$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{b-a}$ est la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\,,b]$.

$$E(X) = \int_a^b x\,f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2}$$
$$= \frac{b+a}{2}.$$

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a\,;b]$ est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$. On appelle : *
Variance de X le réel, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \int_a^b \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

* **écart-type de X**, le réel noté $\sigma(X)$, égale à la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$$V(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \times \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \text{d'où : } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a\,;b]$ est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{12}.$$

III. Loi normale

a. Loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$

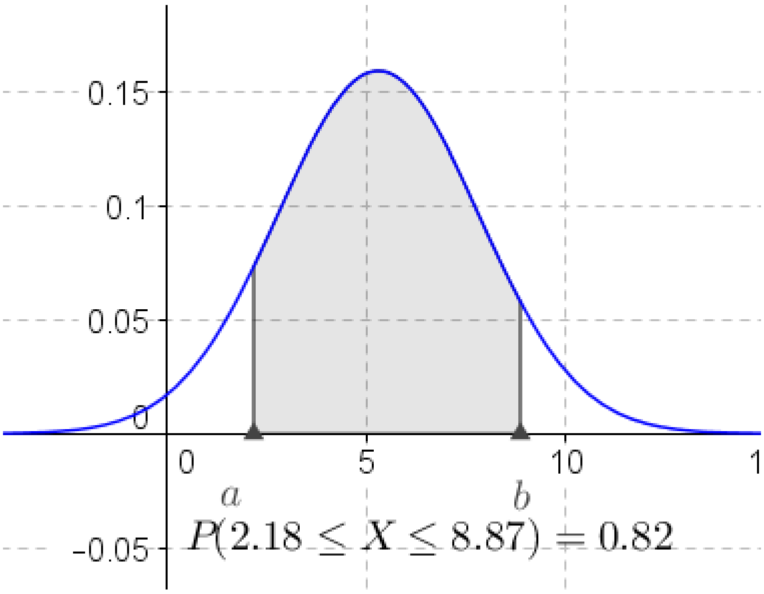
Définition : Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ si, pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$, la probabilité de l'évènement « $X \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x\,;y)\,;x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Cette fonction est la densité de la loi normale d'espérance m et d'écart-type σ.

Remarque : La probabilité de l'événement « $a \leq X \leq b$ » est : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Exemple : On a représenté une loi normale de moyenne $m = 5{,}3$ et d'écart-type $s = 2{,}51$.
La probabilité est l'aire sous la courbe dessinée en bleu ci-contre.



Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ de fonction de densité f alors :

la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$ et l'aire entre cette courbe et l'axe des abscisses est finie égale à 1 ;

pour tout réel b, la limite

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x$$

existe et est finie ; cette limite est la probabilité de l'évènement « $X \leq b$ » ;

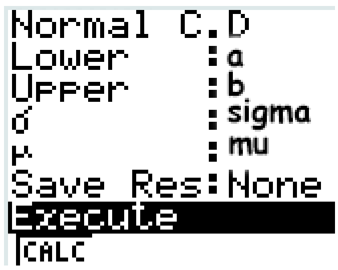
$P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0{,}5$.

Exemple de représentation graphique de la loi normale. (Fichier géogébra)

Calcul de probabilités d'une loi normale à l'aide de la calculatrice :

Lorsque X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type $\sigma, \mathcal{N}(m;\sigma)$,

Pour obtenir la probabilité $P(a \leq X \leq b)$:



- Avec les TI en allant dans le menu DIST, on utilise la 2ème fonction : $normalFRèp(a, b, m, \sigma)$.
- Avec les Casio dans le menu Stat puis DIST et NORM et enfin Cdp,

Le problème qui se pose pour le calcul des probabilités des événements du type « $X \leq b$ » est que la calculatrice ne donne que la probabilité des évènements de la forme « $a \leq X \leq b$ ».

Première méthode : Pour se faire, on utilise le fait que $P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0{,}5$.

Donc pour calculer $P(X \leq b)$ il faut faire deux cas :

- Si $b > m$ on calculera $P(X \leq b) = P(X \leq m) + P(m \leq X \leq b) = 0{,}5 + P(m \leq X \leq b)$.
- Si $b < m$ on calculera $P(X \leq b) = P(X \leq m) - P(b \leq X \leq m) = 0{,}5 - P(b \leq X \leq m)$.

Autre méthode : sans faire de découpage à l'aide la moyenne, il suffit de rentrer dans la calculatrice :

$$P(X \leq b) \simeq P(-10^{99} \leq X \leq b) \quad \text{ou} \quad P(X \geq b) \simeq P(b \leq X \leq 10^{99}).$$

Donne des approximations suffisamment fines pour résoudre les problèmes posés.

b. Les intervalles à « 1, 2 ou 3 sigma »

Théorème : Si une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ alors :

$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \simeq 0{,}68$ (arrondis au centième)

$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \simeq 0{,}95$ (arrondis au centième)

$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \simeq 0{,}997$ (arrondis au millième)

c. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Théorème : Pour n « assez grand » $n \geq 30$ et une probabilité vérifiant : $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors on peut approcher la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n\,,p)$ par la loi normale d'espérance $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

IV. Théorème centrale limite.

Théorème : Soient $X_1, X_2 \dots X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une moyenne μ et un écart-type σ non nul. Pour n suffisament grand, la variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.