Exercice 82.
Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } t \in [0\,;\,\pi[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in [\pi\,;\,2\pi[\end{cases}$$

1. Tracer la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$, puis à l'aide de la périodicité compléter celle-ci sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,6\pi[$.
2. Les coefficients de Fourrier.
   - **a.** Calculer a_0.
   - **b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$.
     On utilisera la propriété : pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\sin(n\pi) = 0$.
   - **c.** Déterminer b_n.
     Pour simplifier l'écriture, on utilisera la propriété : pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
3. Déterminer l'écriture le la série de Fourrier en utilisant les coefficients de la question **2.** et le signe Σ.
4. En déduire le développement en série de Fourrier de la fonction f avec :
   - **a.** 3 harmoniques
   - **b.** 5 harmoniques
   - **c.** 7 harmoniques

   Représenter ces fonctions sur la calculatrice, que constate-t-on ?

Exercice 83. On considère la fonction f de période π définie par $g(t) = t$ sur $[0\,;\,\pi[$.

1. Tracer la fonction g sur l'intervalle $[-\pi\,;\,4\pi[$.
2. Coefficient de Fourrier
   - **a.** Déterminer a_0.
   - **b.** À l'aide d'une intégration par partie calculer a_n.
   - **c.** En utilisant une intégration par partie montrer que $b_n = -\dfrac{1}{n}$.
3. En déduire le développement en Série de Fourrier de la fonction g.

Exercice 84. On considère la fonction h 2π-périodique définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par :

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t = -\pi \\ h(t) = t & \text{si } t \in]-\pi\,;\,\pi[\\ h(t) = 0 & \text{si } t = \pi \end{cases}$$

1. Tracer la fonction h sur l'intervalle $[-3\pi\,;\,7\pi]$.
2. Coefficient de Fourrier
   - **a.** Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$?
   - **b.** En utilisant une intégration par partie, calculer b_n.
3. En déduire le développement en série de Fourrier de la fonction h

Exercice 85. Soit la fonction i π périodique définie sur $[0\,;\,\pi[$ par

$$i(t) = t.$$

1. Montrer que i satisfait les conditions de Dirichlet et appliquer le théorème pour $t = \dfrac{\pi}{4}$ et $t = 0$.
2. Calculer la valeur efficace en utilisant la formule de Parseval.
3. Cacluler la valeur efficace à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 86. Soit j la fonction π-périodique définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $j(x) = x(\pi - x)$.

1. Tracer la fonction j sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,3\pi]$.
2. Calculer les coefficient de Fourrier complexes de j.
3. Donner le développement en série de Fourrier de la fonction j sous forme complexe.
4. Comment retrouver la fonction j ?

Exercice 87. Soit k la fonction paire et 4-périodique définie sur $[0\,;\,2]$ par :

$$\begin{cases} k(t) = 1 & \text{si } t \in [0\,;\,1[\\ k(t) = 2 - t & \text{si } t \in [1\,;\,2] \end{cases}$$

1. Représenter la fonction k sur $[-4\,;\,6]$.
2. Coefficient de Fourrier
   - **a.** Calculer a_0.
   - **b.** Déterminer a_n. On utilisera une intégration par partie.
   - **c.** Sans le calculer donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur du coefficient b_n. Justifier.
3. En déduire le développement en série de Fourrier de la fonction k.
4. On appelle φ la fonction définie par

   $$\varphi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{2} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

   - **a.** Donner l'expression de la fonction φ.
   - **b.** Représenter la fonction φ dans un repère orthogonal.

Exercice 88. Soit l la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par $l(t) = t^2$.

1. Tracer le graphe de la fonction l sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,4\pi]$.
2. Coefficient de Fourrier.
   - **a.** Étudier la parité de la fonction l.
   - **b.** En déduire la valeur du coefficient b_n.
   - **c.** Calculer a_0.

d. En utilisant une double intégration par partie, déterminer a_n.

3. **a.** Expliquer que la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que la fonction est dérivable sur $]-\pi\,;\,\pi[$.
   c. En déduire la convergence de la série de Fourrier vers la fonction l.
4. En écrivant $f(0)$ de deux manières différentes, donner la valeur exacte de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant la formule de Parseval.

Exercice 89. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(t) = |\sin\ t|$

1. **a.** Montrer que m est π-périodique.
   b. Montrer que la fonction m est paire.
   c. Représenter m sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourrier de m.
3. Calculer
$$m_{\text{eff}}^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} m^2(t)\mathrm{d}t.$$
4. La formule de Parseval nous donne
$$m_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$
Comparer avec le résultat obtenu à la question **3.**.

Exercice 90.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes
Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :
$$\begin{cases} f(t) &=& 0,5t+0,5 \quad \text{si} \quad -1<t<1 \\ f(t) &=& 0,5. \end{cases}$$
Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :
$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
2. Démontrer que $a_0 = \frac{1}{2}$.
3. **a.** Préciser la valeur de la pulsation ω.
   b. En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.
   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :
$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$
4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.
   a. Tracer la représentation graphique de la fonction g.
   b. Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?
   c. En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.
5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :
$$f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[f(t)\right]^2\,\mathrm{d}t.$$
Démontrer que $f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{3}$.
6. On rappelle la formule de Parseval :
$$f_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :
$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
   a. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\frac{P}{f_{\text{eff}}^2}$.
   b. En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2, dont le développement en série de Fourier est :
$$S_h = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\pi t].$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Sur l'annexe page 5 sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.