Exercice 91. A la main calculer $A+B$ et $2A-3B$

1.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 92.
A la main calculer $A\times B$ et $B\times A$

1.
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 93.
Calculer A^2 et A^3
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 94.
Avec la calculatrice calculer $A\times B$ et $B\times A$.

1.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 95.
Calculer B^2 et B^3
$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 96.
Montrer que B est la matrice inverse de A.

1.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 97.
Déterminer à l'aide d'une calculatrice la matrice B inverse de la matrice A.

1.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 98. Résoudre les systèmes d'équations suivants

1.
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 5y + 15z = 5 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

Exercice 99. On considère les matrices :
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer A^2.

b. Montrer que $A^2 = A+2I$.

Exercice 100. Une entreprise fabrique 3 articles X, Y, Z. Chaque article passe dans trois ateliers différents A_1, A_2, A_3.

Le tableau donne les temps d'utilisation de chaque atelier pour un article X, un article Y, un article Z.

	A_1	A_2	A_3
X	2	3	4
Y	1	2	5
Z	2	1	2

On lit, par, exemple, que la fabrication d'un article X nécessite :
- 2 heures d'utilisation de l'atelier A_1,
- 3 heures d'utilisation de l'atelier A_2,
- 4 heures d'utilisation de l'atelier A_3.

On sait que pour une période donnée : - l'atelier A_1 a travaillé 33 h ;
- l'atelier A_2 a travaillé 40 h ;
- l'atelier A_3 a travaillé 69 h.

On se propose de déterminer combien d'articles de chaque type l'entreprise a fabriqué durant cette période.
On note x, y, z le nombre d'articles X, Y, Z fabriqués durant la période.

1. Montrer que le temps d'utilisation de l'atelier A_1 est, en heures, $2x+y+2z$.

2. Exprimer en fonction de x, y, z :
   • le temps d'utilisation de l'atelier A_2,
   • le temps d'utilisation de l'atelier A_3.
3. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 2z & = & 33 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 40 \\ 4x & + & 5y & + & 2z & = & 69 \end{array}\right.$$

4. Donner, pour la période donnée, le nombre d'articles de chaque type que l'entreprise a fabriqués.

Exercice 101. A et B sont deux produits concurrentiels sur le marché; on suppose qu'aucun produit nouveau n'apparaît sur le marché.
En 2014, les parts de marché de A et de A sont représentées par la matrice colonne :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que A a 30 % de part de marché et que B a 70 % du marché. La répartition probable pour 2015 est représentée par la matrice colonne :

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $P_1 = M \times P_0$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

la matrice M est appelée matrice de transition.

1. a. Calculer P_1.
   b. Vérifier que $x_1 + y_1 = 1$.
   c. Donner les parts de marché de A et de B pour 2015.
2. La répartition probable pour 2016 est représenter par la matrice colonne :

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   On suppose que l'évolution du marché suit la même loi que précédemment.
   a. Calculer P_2.
   b. Donner les parts de marchés de A et de B pour 2016.

Fonctions de deux variables

Exercice 102. *Autre version du tas de sable*
Une entreprise du bâtiment s'est fait livrer du sable.
Ce sable est disposé dans un bac carré de 8 mètres de côté et de 4 mètres de haut.
Le camion charge le bac jusqu'à ce que celui-ci déborde.
On modélise le tas de sable par un paraboloïde définie pour tout réel $x, y \in [0 ; 8]$ par :

$$f(x,y) = -\frac{(x-4)^2 + (y-4)^2}{16} + 5.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la quantité totale de sable dans le bac et d'aplanir celui-ci.

1. On définit le fonction g sur $[0 ; 8]$ par :

$$g(x) = \int_0^8 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

   Calculer une expression de la fonction g.
2. Calculer l'intégrale de la fonction g entre 0 et 8.
   Ce résultat se note aussi :

$$\int_0^8 \int_0^8 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

3. En déduire la quantité en m^3 de sable dans le bac.
4. Est-ce que cette quantité de sable peut-être contenue dans le bac ?
   Sinon de quelle taille devrait-être le bac pour pouvoir aplanir le tas de sable ?

Courbes paramétrés

Exercice 103. Étudier et tracer la courbe paramétré définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = -6t^3 + 6t^2 \\ y(t) = -6t^2 + 6t \end{array}\right. ; t \in [0 ; 1].$$

Exercice 104. Soit un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphiques 5 cm, la courbe de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x=f(t)=2\cos t \\ y= g(t)= \sin(2t) \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

1. a. Donner la période commune aux deux fonctions.
   b. Étudier la parité des deux fonctions, et en déduire un élément de symétrie de la courbe.
   c. Calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$. Que peut-on en déduire pour les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$?
   d. Déduire de ce qui précède l'intervalle d'étude de f et g.
2. Étudier les variations de f et g sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g.
3. Préciser les points où $\mathscr{C}$ admet des tangentes parallèles aux axes du repère.
4. Construire la courbe.