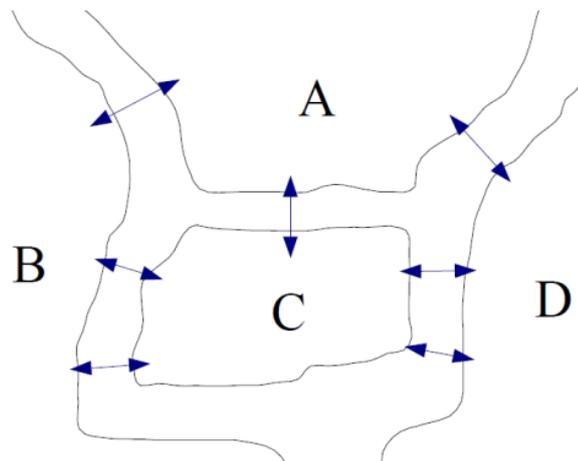


I. Notion de graphe et de chaîne eulérienne

Problème : Au XVIII^e siècle, la ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad, en Russie) comprenait sept ponts et quatre quartiers, disposés selon le schéma ci-à-droite. Le souhait des habitants de Königsberg était de trouver un trajet passant une fois et une seule par chaque pont.

Comment faire ?



Définition :

Un **graphe fini** (S, A) est un schéma constitué de sommets, et d'arêtes (ie : segments joignant des sommets entre eux), en nombre fini.

Etant donné un graphe G , on appelle **sous-graphe** de G tout graphe constitué de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui les relie.

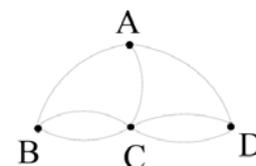
L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Le **degré** (ou puissance) d'un sommet est le nombre d'arêtes qui ont pour extrémité ce sommet.

On modélise alors la ville de Königsberg par le graphe suivant :

Les quartiers sont représentés par des sommets, et les ponts par des arêtes.

Ce graphe est d'ordre 4. A, B et D sont de degré 3, C est de degré 5.



Théorème : (Lemme des poignées de main)

Dans tout graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Définition :

Deux sommets sont dit **adjacents** s'ils sont reliés par au moins une arête.

Un graphe est dit **complet** lorsque deux sommets distincts quelconques sont adjacents.

Définition :

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets x_i et d'arêtes a_i : $x_0 a_1 x_1 a_2 x_2 a_3 \dots x_{n-1} a_n x_n$ telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$: x_i et x_{i+1} sont les extrémités de l'arête a_{i+1} .

Une **chaîne simple** est une chaîne qui passe au plus une fois par une arête donnée.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes du graphe.

Remarque : parfois on emploie le mot « chemin » pour désigner une chaîne.