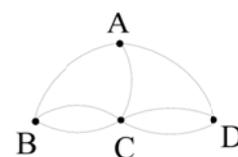


II. Matrice associée à un graphe

Problème : Dans le problème des sept ponts de Königsberg, on souhaite maintenant savoir : combien existe-t-il de façons différentes de passer du quartier B au quartier D en empruntant exactement 2 ponts ? Puis, en empruntant exactement 10 ponts ? (pas dans le Breal)

Définition 5 : Etant donné un graphe G dont les sommets sont numérotés 1 à n , on appelle **matrice de G** la matrice carrée d'ordre n définie comme suit : le coefficient m_{ij} de la ligne i et de la colonne j est le nombre d'arêtes partant du sommet i et arrivant au sommet j .

Exemple : La matrice associée au graphe précédant est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



On la lit de la façon suivante :

Départ \ Arrivée	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	1	2	0	2
D	1	0	2	0

Remarque : la matrice obtenue est symétrique.

Théorème 3 : Soit M la matrice associée un graphe G après avoir numéroté ses sommets. Dans la matrice M^n , le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est le nombre de chaînes de longueur n allant du sommet i au sommet j .

Réponse au problème : On calcule M^2 à la main et on obtient M^{10} à l'aide d'un logiciel (TI-Nspire CAS).

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad M^{10} = \begin{pmatrix} 73591 & 76610 & 11016 & 76610 \\ 76610 & 95381 & 102961 & 95381 \\ 11016 & 102961 & 74009 & 102961 \\ 76610 & 95381 & 102961 & 95381 \end{pmatrix}$$

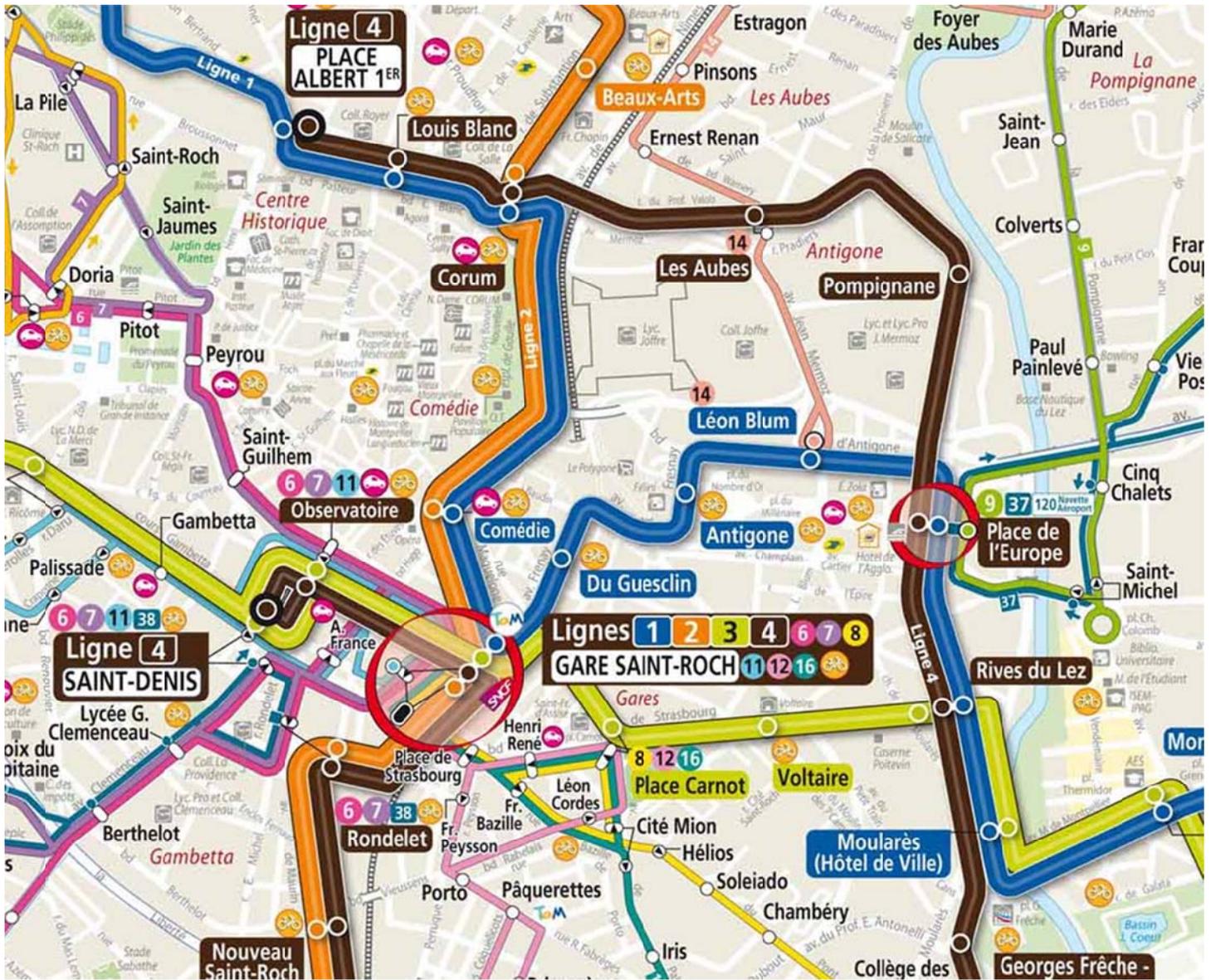
Il y a donc **5** façons (chemins) différentes d'aller de B à D en empruntant exactement 2 ponts, et **95381** itinéraires différents pour aller de B à D en empruntant exactement 10 ponts.

Entraînement au calcul de matriciel : exercice n°14 – 20 p 270

III. Autre Problème d'entraînement

a. Les lignes de tramway de Montpellier

Le plan ci-dessous indique les différentes lignes de bus et de tramway dans le centre de Montpellier.



- En ne considérant que les lignes de tram et les arrêts où un changement de ligne est possible (comme Saint-Denis ou gare Saint-Charles), tracer le graphe du centre de la ville.
- Quel chemin permet d'aller de la place Albert 1^{er} aux rives du Lez ?
- Quel chemin va-t-on privilégier ? (Expliquer votre démarche)