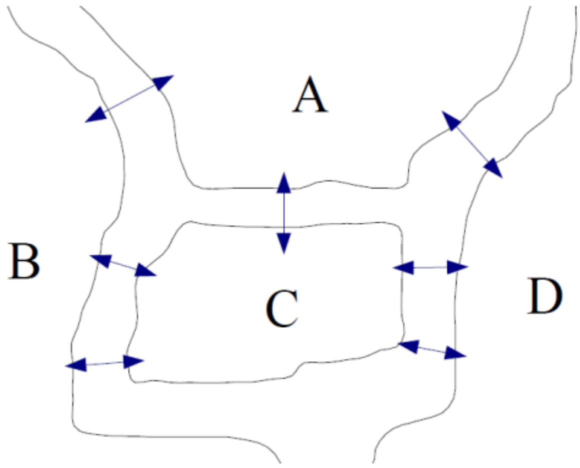
I. Notion de graphe et de chaîne eulérienne

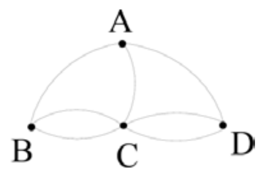
Problème : Au XVIIIe siècle, la ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad, en Russie) comprenait sept ponts et quatre quartiers, disposés selon le schéma ci-à-droite. Le souhait des habitants de Königsberg était de trouver un trajet passant une fois et une seule par chaque pont.



Comment faire ?

Définition 1 :
Un **graphe fini** (S, A) est un schéma constitué de sommets, et d'arêtes (ie : segments joignant des sommets entre eux), en nombre fini.
Etant donné un graphe G , on appelle **sous-graphe** de G tout graphe constitué de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui les relient.
L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
Le **degré** (ou puissance) d'un sommet est le nombre d'arrêtes qui ont pour extrémité ce sommet.

On modélise alors la ville de Königsberg par le graphe suivant :



Les quartiers sont représentés par des sommets, et les ponts par des arêtes.
Ce graphe est d'ordre 4. A, B et D sont de degré 3, C est de degré 5.

Théorème 1 : (Lemme des poignées de main)
Dans tout graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

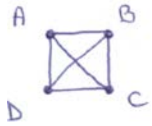
Définition 2 :
Deux sommets sont dit **adjacents** s'ils sont reliés par au moins une arête.
Un graphe est dit **complet** lorsque deux sommets distincts quelconques sont adjacents.

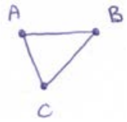
Définition 3 :
Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets x_i et d'arêtes a_i : $x_0 a_1 x_1 a_2 x_2 a_3 \dots x_{n-1} a_n x_n$ telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$: x_i et x_{i+1} sont les extrémités de l'arête a_{i+1} . (pas dans le Breal)
Une **chaîne simple** est une chaîne qui passe au plus une fois par une arête donnée. (pas dans le Breal)
Une **chaîne eulérienne** est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes du graphe.

Remarque : parfois on emploie le mot « chemin » pour désigner une chaîne (cf compléments).

Exemples :

1) La chaîne A,(AB),B,(BC),C,(CD),D est simple mais pas eulérienne.



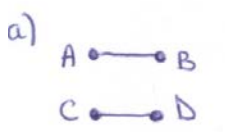


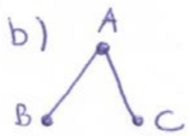
2) La chaîne A,(AB),B,(BC),C,(CA),A est une chaîne eulérienne.

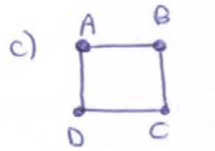
Définition 4 :
Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques. (pas dans le Breal)
Un **cycle** est une chaîne simple qui commence et se termine par le même sommet.
Si cette chaîne est eulérienne, le cycle est alors dit **eulérien**.
Un graphe est dit **connexe** si entre deux sommets distincts quelconques il y a au moins une chaîne.
Un graphe est dit **eulérien** s'il contient un cycle eulérien.

Remarque : Une boucle compte alors pour 2 dans le degré d'un sommet.

Exemples :







Le graphe a) est non connexe. Le graphe b) n'est pas eulérien. Le graphe c) est eulérien.

Le problème des sept ponts revient donc à chercher une chaîne eulérienne dans le graphe représenté précédemment.

Théorème 2 : (Euler)
Un graphe simple admet un cycle eulérien si et seulement si ce graphe est connexe et s'il n'a aucun sommet de degré impair.

Corollaire : Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il a au plus deux sommets de degré impair

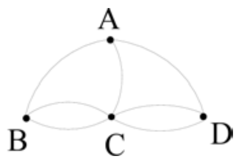
Réponse au problème : Le graphe des sept ponts de Königsberg a 4 sommets de degré impair. Donc il n'a pas de chaîne eulérienne, ce qui prouve l'impossibilité de trouver un itinéraire passant une fois et une seule sur chaque pont.

II. Matrice associée à un graphe

Problème : *Dans le problème des sept ponts de Königsberg, on souhaite maintenant savoir : combien existe-t-il de façons différentes de passer du quartier B au quartier D en empruntant exactement 2 ponts ? Puis, en empruntant exactement 10 ponts ?* (pas dans le Breal)

Définition 5 : Etant donné un graphe G dont les sommets sont numérotés 1 à n, on appelle **matrice de G** la matrice carrée d'ordre n définie comme suit : le coefficient m_{ij} de la ligne i et de la colonne j est le nombre d'arêtes partant du sommet i et arrivant au sommet j.

Exemple : La matrice associée au graphe précédant est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$



On la lit de la façon suivante :

Départ\Arrivée	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	1	2	0	2
D	1	0	2	0

Remarque : la matrice obtenue est symétrique.

Théorème 3 : Soit M la matrice associée un graphe G après avoir numéroté ses sommets. Dans la matrice M^n, le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est le nombre de chaînes de longueur n allant du sommet i au sommet j.

Réponse au problème : On calcule M^2 à la main et on obtient M^{10} à l'aide d'un logiciel (TI-Nspire CAS).

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & \mathbf{5} \\ 4 & 1 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 73591 & 76610 & 11016 & 76610 \\ 76610 & 95381 & 102961 & \mathbf{95381} \\ 11016 & 102961 & 74009 & 102961 \\ 76610 & 95381 & 102961 & 95381 \end{pmatrix}$$

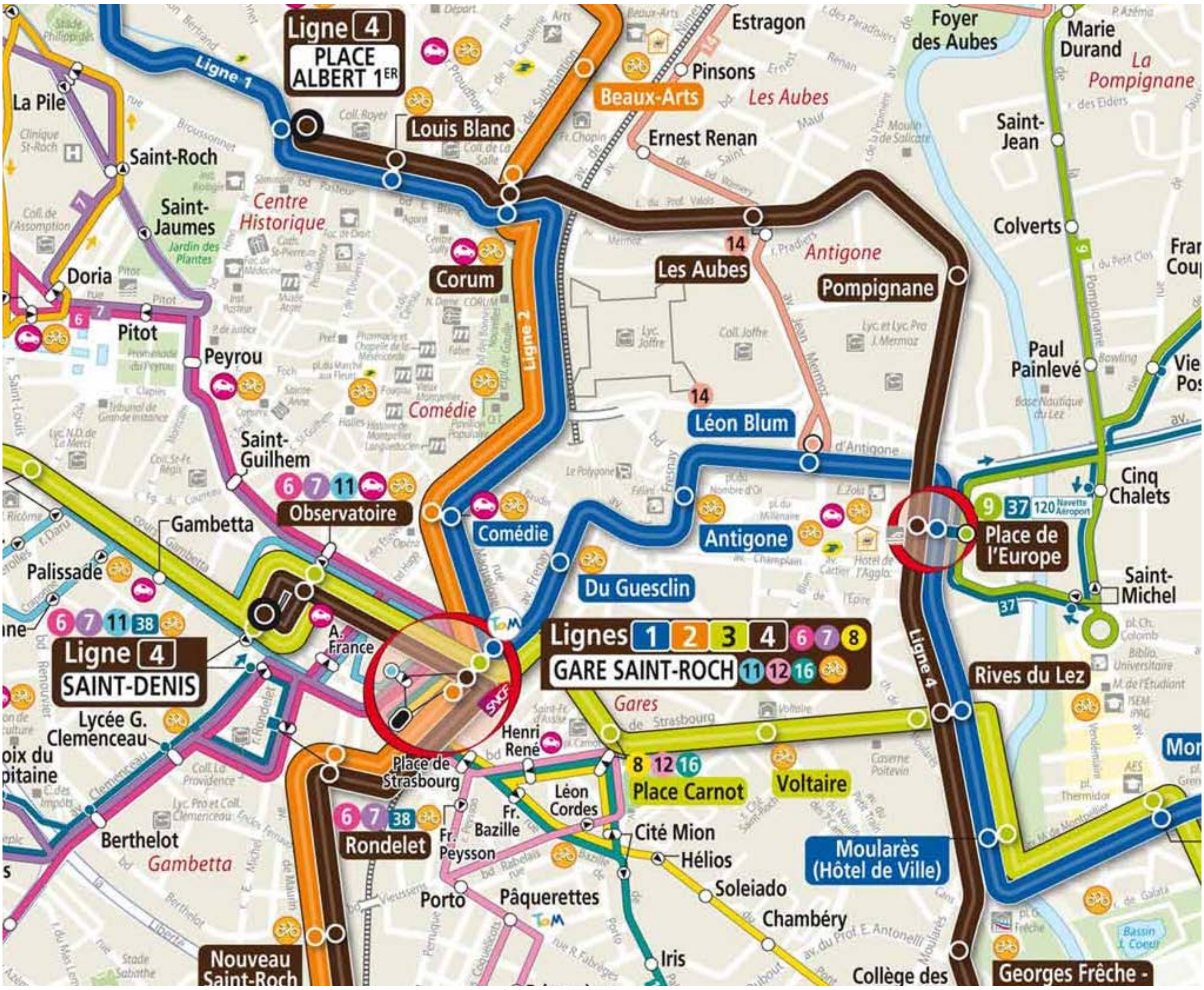
Il y a donc **5** *façons (chemins) différentes d'aller de B à D en empruntant exactement 2 ponts, et* **95381** *itinéraires différents pour aller de B à D en empruntant exactement 10 ponts.*

Entrainement au calcul de matriciel : exercice n°14 – 20 p 270

III. Autre Problème d'entraînement

a. Les lignes de tramway de Montpellier

Le plan ci-dessous indique les différentes lignes de bus et de tramway dans le centre de Montpellier.



- En ne considérant que les lignes de tram et les arrêts ou un changement de ligne est possible (comme Saint-Denis ou gare Saint-Charles), tracer le graphe du centre de la ville.
- Quel chemin permet d'aller de la place Albert 1er aux rives du Lez ?
- Quel chemin va-t-on privilégier ? (Expliquer votre démarche)