I. Equation et inéquation du second degré

Théorème : Soient a, b et c des nombres réels avec a non nul, on appelle discriminant et on note Δ le nombre $b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$,

- admet deux solutions réels si $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- admet un solution double si $\Delta = 0$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- n'admet pas de solutions réel si $\Delta < 0$.

Remarque : *Ces solutions se nomment parfois racine de l'équation (ou du polynôme).*

Théorème : Soient a, b et c des nombres réels avec a non nul, on appelle discriminant et on note Δ le nombre $b^2 - 4ac$.

Le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$, est donné par les tableaux suivants :

- si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe(a)	0	-signe(a)	0	signe(a)	

- si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe(a)	0	signe(a)	

- si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe(a)	

Remarque : Résoudre l'inéquation $ax^2 + bx + c \geq 0$ revient à déterminer le signe du trinomes.

II. Fonctions de références

a. Fonction affine

Définitions : On appelle fonction affine toutes fonction de la forme $f(x) = ax + b$.
a est le coefficient directeur de la droite ;
b est l'ordonnée à l'origine c'est l'image de 0 par la fonction f. (c'est-à-dire $f(0) = b$).

b. Fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle fonction polynômes du second degré, ou trinôme, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres connus, et $a \neq 0$.
Il s'agit de la forme développé de $f(x)$.

Propriété : Dans un repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole de sommet S.

i. Variations des fonctions polynômes de degré 2

Théorème : Les fonctions polynômes du second degré varie selon le signe de a, on a 2 cas :
- Si $a > 0$: la fonction est décroissante puis ensuite croissante , le tableau de variation est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $a < 0$: la fonction est croissante, puis décroissante le tableau de variation devient :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

ii. Sommet et extrémum

Une conséquence immédiate du théorème précédent :
Le sommet S de la parabole a pour coordonnées : $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Si $a > 0$, la fonction polynôme admet un minimum : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, la fonction polynôme admet un maximum : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

iii. Forme canonique

Théorème : Pour toute fonction polynôme f d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$, on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Alors la forme canonique de la fonction f est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 7$$

Déterminer la forme canonique de la fonction f…

c. Fonction logarithme népérien

Définition : On appelle fonction logarithme népérien, l'unique fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, ayant pour fonction dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
et vérifiant, pour tous réel a et b strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$.
La fonction logarithme népérien est notée $\ln$.

Propriété : Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \text{ et } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Pour et tout entier relatif n,

$$\ln(a^n) = n\ln a \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a.$$

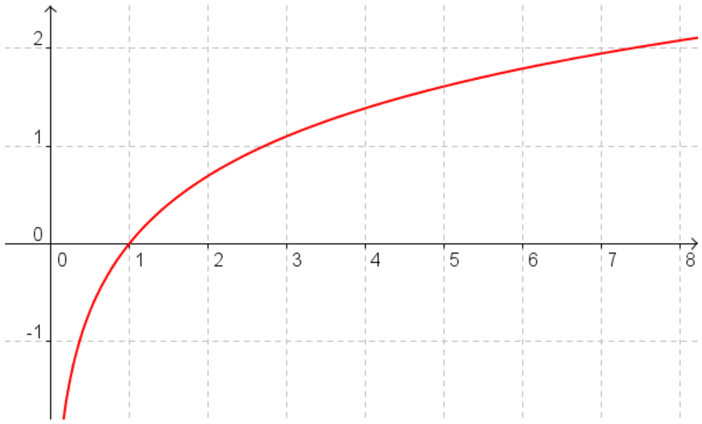
Propriété : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Sa fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

Dans le tableau de variation, on note f la fonction $\ln$ et f' sa dérivée.

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$



d. Fonction exponentielle

Définition : Pour tout nombre réel a, on appelle exponentielle de a, et on note e^a, l'unique réel b tel que $\ln b = a$.

Propriétés : Pour tout réel x, et tout réel y **strictement positif** , on a les propriétés suivantes :

① $\mathrm{e}^x > 0$ ② $\ln y = x \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^x$ ③ $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ ④ $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$

Propriété :

Pour tous réels x et y, et tout entier naturel n,

① $e^{x+y} = e^x e^y$ ② $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ ③ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ ④ $(e^x)^n = e^{nx}$.

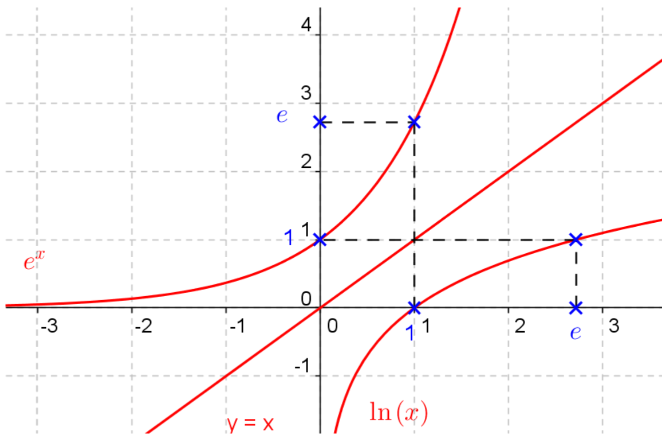
Propriété : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x $f'(x) = e^x$.

Propriété :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \; et \; \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

On résume ces informations dans un tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$\nearrow +\infty$



Propriété : Pour tout nombre réel a positif, on appelle exponentielle en base a, et on note a^x, la fonction tel que pour tout x, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$.

e. Fonction racine

Définitions : On appelle fonction racine la fonction qui a tout x et $\mathbb{R}^+$ associe la racine de x noté $\sqrt{x}$.

Propriété : La fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

f. Fonction trigonométrique

i. Fonction sin

Définition : La fonction sinus est définie pour tout nombre α réel $(\mathbb{R})$ pas $\sin \alpha$

ii. Fonction cos

Définition : La fonction sinus est définie pour tout nombre α réel $(\mathbb{R})$ pas $\cos \alpha$

Propriété : Ces fonction trigonométrique sont périodique de période 2π, c'est-à-dire pour tout nombre réel t et tout entier relatif n

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$$
$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$$

III. Généralité

a. L'ensemble de définition

Définitions : On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f l'ensemble des valeurs possédant une image par f.

Remarque : Elle provient de la modélisation faite du problème.

Exemples mathématiques :
La fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

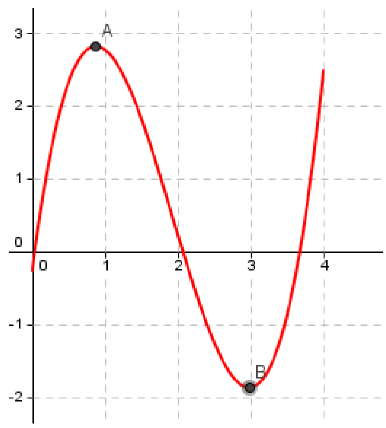
Note : l'ensemble $\mathbb{R}$ représente tous les nombre réels (exemple : $0\,;\ -1\,;\sqrt{2}\ ;\pi\,;1{,}4\,,10^{10}$ etc ...)

b. Les variations

i. Extrémum d'une fonction sur un intervalle

Définitions : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, on appelle extrémum de f sur I :
- Un maximum M réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- Un minimum m réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Exemple : On a tracé la fonction g ci-dessous :



💻 Dans le menu CALCUL les fonctions maximum et minimum permette d'en trouver une approximation.

ii. Sens de variation d'une fonction sur un intervalle (monotonie)

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et pour tous a et b deux réel de I tel que $a < b$:
- $f(a) < f(b)$, on dit que la fonction f est **croissante**.
- $f(a) > f(b)$, on dit que la fonction f est **décroissante**.
- $f(a) = f(b)$, on dit que la fonction f est **constante**.

Exemple : Sur l'exemple précédent, la fonction g est croissante décroissante, puis croissante. On représente ces informations sous forme d'un tableau de variation :

x	0	0.9	3	4
$f(x)$	0 ↗	2.9 ↘	-1.9 ↗	2.5

c. Limites

i. Théorèmes générale

Théorème : (somme de fonction) Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ vers b alors $f(x)+g(x)$ tend vers $a+b$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers $-\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$tend vers $-\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $-\infty$.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x)+g(x)$ est une forme indéterminée.

Exemples : Soient trois fonctions définies sur leurs domaines de définition respectifs :

$$f(x)=x^2-2x-14 \qquad \mathcal{D}_f=\mathbb{R}$$
$$g(x)=\sin(x)+\cos(x) \qquad \mathcal{D}_g=\mathbb{R}$$
$$h(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \qquad \mathcal{D}_h=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x-14)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x-14)=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0^+$$

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un inervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers b, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers ab.
- Si $f(x)$ tend vers a (avec $a\neq 0$) et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon le signe de a.
- Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ et $g(x)$tend vers $\pm\infty$, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon la règle du produit.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x)\times g(x)$ est une forme indéterminée.

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que u ne s'annule pas sur I.

- Si $u(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers 0.
- Si $u(x)$ tend vers un réel a non nul, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $\frac{1}{a}$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et est strictement positif sur I, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et strictement négatif sur I, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $-\infty$

Exemple : Limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$:

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie est positive sur $[0\,;\,+\infty[$, sa limite en 0 est 0.

On déduit du théorème précédent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

ii. Cas des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini

Activité : Soit les fonctions f, g et h, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{-x^2 + 2x - 7}, \qquad g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} \text{ et } h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

Déterminer les limites quand x tend vers $+$ et vers $-\infty$.

d. Comportement asymptotique

i. Asymptotes horizontales

Définition : Soient une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a]$) avec a un réel et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Lorsque la fonction f admet pour limite en $+\infty$ (r. en $-\infty$) un réel k ; c'est-à-dire:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k, \left(\text{r. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = k\right)$$

On dit que la droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (r. $-\infty$).

ii. Asymptotes verticales

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$ (ou $]-\infty\,;a[$) avec a un réel et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Lorsque la limites de f en a est égale à $\pm\,\infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

iii. Asymptotes obliques

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha\,;\,+\infty[$ (ou $]-\infty\,;\alpha[$) avec α un réel et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Lorsque la limite de $(f - y)$ en $\pm\infty$ est égale à 0 :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Activité : Donner les asymptotes des fonctions f, g et h de l'activité précédente.

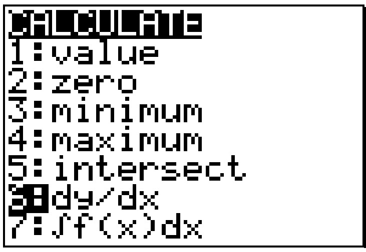
e. Nombre dérivé et fonction dérivée

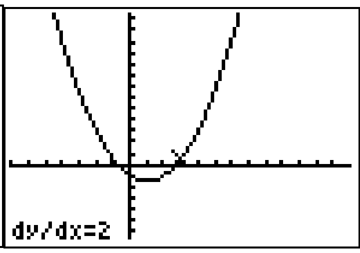
i. Nombre dérivé en a

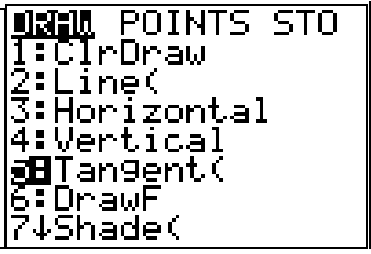
Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On appelle nombre dérivé en a, le coefficient directeur de la tangente à f en le point d'abscisse a.

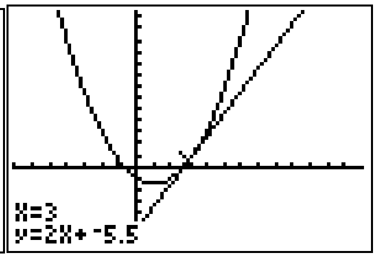
Exemple : On a représenté une fonction, faites bouger l'abscisse a du point M, on a affiché le coefficient directeur de la tangente. (lien),

Sur la calculatrice, dans le menu CALCUL (image 1 et 2) il est possible de faire afficher le nombre dérivé d'une fonction en un point (3 sur l'exemple : $f'(3) = 2$).
En allant dans le menu DESSIN (image 3 – 4) on peut faire afficher la tangente à la courbe ainsi qu'une équation de cette tangente ($y = 2x - 5{,}5$)









(bouger le point b) Remarque : Le nombre dérivé au point d'abscisse $A(a\,;f(a))$ est la limite des coefficients directeurs de la droite (AB) lorsque B se rapproche de A.

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ii. Fonctions dérivées

a) Fonction de références

Théorèmes : Soient k, a et b des constantes réelles et n un entier naturel non nul.

Ensemble de définition de f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\sin x$	$\cos x$	e^x	$\frac{1}{x}$
Ensemble de définition de f'	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

b) Opérations sur les fonctions

Théorèmes : Soient u et v deux fonctions de la variable x dérivables sur un intervalle I, k une constante réelle et n un entier naturel non nul.

f	$u+v$	$k\,u$	$u.v$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	u^n	$\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
f'	$u'+v'$	$k\,u'$	$u'v+uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$n\,u'u^{n-1}$	$-a\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$

c) Composition de fonctions

Théorème : Soient une fonction u définie et dérivable sur I un intervalle réel et n un entier naturel non nul. Pour tout réel $x \in I$

$$\left(\left(u(x)\right)^n\right)' = n \times u'(x)\left(u(x)\right)^{n-1}.$$

Théorème : Soit une fonction u définie et dérivable sur I un intervalle réel. Pour tout réel $x \in I$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

Théorème : Soit une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur I un intervalle réel. Pour tout réel $x \in I$

$$\left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = u'(x)\ln\left(u(x)\right).$$

d) Variation et dérivée

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur I un intervalle réel.
Pour tout x d'un intervalle J_0 $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur J_0.
Pour tout x d'un intervalle J_0 $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur J_0.

f. Parité et périodicité

i. Parité

a) Fonction paire

Définition : On dit qu'une fonction f est **paire** si pour tout réel x du domaine de définition

$$f(-x) = f(x).$$

Propriété : La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : Les fonctions $x \mapsto 3x^2 + x^4$; $x \mapsto \frac{1}{x^4+7x^6}$; $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions paires.

b) Fonction impaire

Définition : On dit qu'une fonction f est impaire si pour tout réel x du domaine de définition

$$f(-x) = -f(x).$$

Propriété : La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point O.

Exemple : Les fonctions $x \mapsto x^3 + 2x^5$; $x \mapsto \frac{1}{x+2x^3}$; $x \mapsto \sin x$ sont des fonctions impaires.

ii. Périodicité

Définition : On dit qu'une fonction f est périodique de période T lorsque pour tout x réel du domaine de définition :

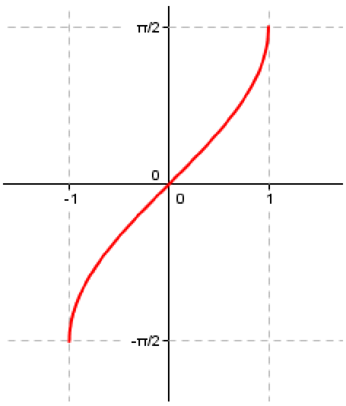
$$f(x+T) = f(x).$$

Propriété : Soit f une fonction de période T alors pour tout réel x du domaine de définition et pour tout entier naturel n :

$$f(x+nT) = f(x).$$

Exemples : Les fonctions circulaires $\sin$ $\cos$ sont périodiques de période 2π.

IV. Fonction circulaire réciproque.

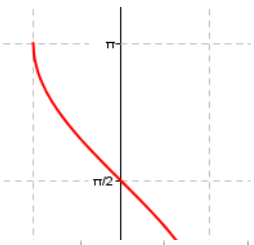


g. Fonction arcsin

Définition : La fonction $\arcsin$ est définie sur $[-1\,;1]$ tel que pour tout $x \in [-1\,;1]$ et pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ on ait :

$$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(y)$$

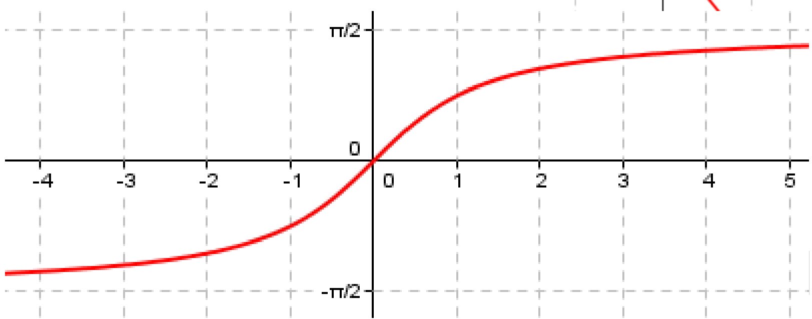
h. Fonction arccos



Définition : La fonction $\arccos$ est définie sur $[-1\,;1]$ tel que pour tout $x \in [-1\,;1]$ et pour tout $y \in [0\,;\pi]$ on ait :

$$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(y)$$

i. Fonction arctan



Définition : La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ on ait :

$$\arctan(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tan(y)$$

Propriété : Pour tout nombres réels x,

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$