

Problème n° 1 : Yin et Yang

Sur un diamètre $[AB]$ d'un cercle de rayon 4 cm, on marque un point M . On désigne par $2x$, avec $0 \leq x \leq 4$, la longueur de AM .

On trace deux demi-cercles de part et d'autre de (AB) , de diamètre $[AM]$ pour l'un et $[BM]$ pour l'autre. Exprimer l'aire de la partie hachurée et déterminer pour quelle valeur de x cette aire est minimum.

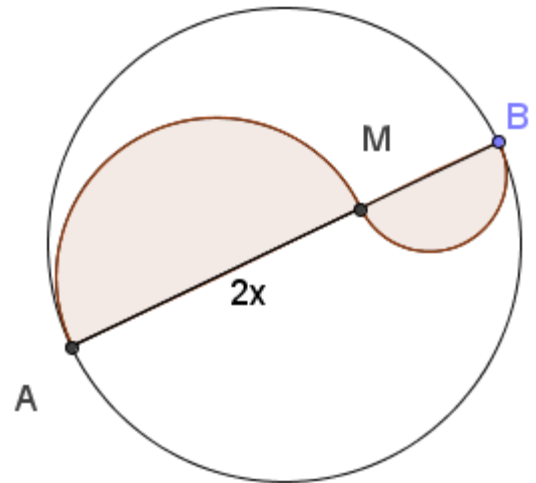


Figure 1 - Fichier Géogébra disponible

L'énoncé nous choisit ici la variable x dans l'intervalle $[0 ; 4]$ représentant le rayon du premier demi-cercle de diamètre $[AM]$, il s'agit ici d'étudier l'aire des deux demi-cercles (l'aire rouge sur la figure).

- Aire du demi-cercle de diamètre $[AM]$:

$$\mathcal{A}_1(x) = \frac{\pi x^2}{2}$$

On divise par deux pour obtenir l'aire du demi-cercle.

- Aire du demi-cercle de diamètre $[MB]$.

Tout d'abord il nous faut déterminer le rayon de ce demi-cercle :

$$\frac{MB}{2} = \frac{AB - AM}{2} = \frac{8 - 2x}{2} = 4 - x.$$

$$\mathcal{A}_2(x) = \frac{\pi(4 - x)^2}{2} = \frac{\pi}{2}(16 - 2 \times 4x + x^2) = \frac{\pi}{2}(x^2 - 8x + 16).$$

L'aire de la partie rouge qui nous intéresse est la somme des deux aires précédentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}(x^2 - 8x + 16) = \frac{\pi}{2}(2x^2 - 8x + 16) \\ &= \frac{\pi}{2} \times 2(x^2 - 4x + 8) = \pi(x^2 - 4x + 8). \end{aligned}$$

Ceci est l'équation d'un fonction polynômes du second degré. Son premier coefficient est $a = \pi$, strictement positif.

Donc la parabole représentant cette fonction est tournée vers le haut ; la fonction admet donc un minimum.

Le problème est ramené à chercher le minimum de cette fonction. Qui est atteint pour la même valeur de x que le minimum de la fonction f définit également sur $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 8.$$

Dans le cas de cette fonction, on détermine $a = 1$, $b = -4$ et $c = 8$.

Le minimum est atteint lorsque $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$.

Et l'aire minimum vaut : $\mathcal{A}(2) = \pi(2^2 - 4 \times 2 + 8) = \pi(4 - 8 + 8) = 4\pi \approx 12,57 \text{ cm}^2$.

[Animation](#) le point E a pour abscisse la valeur du curseur et pour ordonnée l'aire de la surface rouge des deux demi-cercles.