

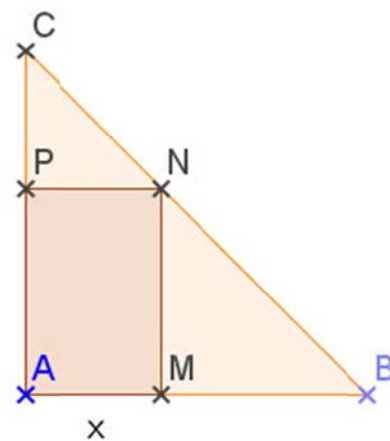
Problème n° 2 : Triangle et rectangle

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 6 \text{ cm}$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$,

Soient $N \in [BC]$ et $P \in [AC]$ tels que le quadrilatère $AMNP$ soit un rectangle.

Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale ?

☞ Pour pouvoir calculer l'aire du rectangle $AMNP$, il nous faut la longueur du segment $[AP]$ qui est égale à la longueur du segment $[MN]$.



Il faut tout d'abord justifier que les triangles MBN et PNC sont rectangles isocèles en B et P : en effet

- Ils sont tous deux rectangles par construction du rectangle $AMNP$
- et isocèles car les angles \widehat{MBN} et \widehat{NCP} valent 45° parce que le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

Ensuite, la variable x est définie dans l'intervalle $[0 ; 6]$.

Il s'agit ici d'étudier l'aire du rectangle $AMNP$ et d'en trouver son maximum.

Rappel : L'aire d'un rectangle est donnée par longueur \times largeur (ici $AM \times AP$)

La longueur $AM = x$ d'après les choix de l'énoncé.

Calculons la longueur AP : $AP = MN \stackrel{\substack{= \\ \text{car le triangle MBN} \\ \text{est isocèle en M.}}}{=} MB = AB - AM = 6 - x$.

Donc l'aire du rectangle $AMNP$ est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$f(x) = (6 - x) \times x = 6x - x^2.$$

Cette fonction est un polynôme du second degré de coefficients :

$$a = -1, \quad b = 6 \quad \text{et} \quad c = 0.$$

Le premier coefficient $a = -1$ est strictement négatif, donc la parabole représentant cette fonction est tournée vers le bas. Elle admet un maximum atteint lorsque :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

L'aire du triangle est maximale lorsque $x = 3$, c'est-à-dire lorsque le point M est au milieu du segment $[AB]$.

L'aire maximale se calcule alors en faisant : $f(3) = 6 \times 3 - 3^2 = 18 - 9 = 9 \text{ cm}^2$.

Animation : le point D à pour abscisse x la valeur du curseur x qui se déplace et en ordonnée l'aire du rectangle $AMNP$.